
VE
RI
TAS







Erschienen sind bis jetzt aus dem Gebiete der

Mathematik:

Nr. 5. **C. F. Gauss**, Flächentheorie. (1827.) Deutsch herausg. v. A. Wangerin. (62 S.) ℳ —.80.

» 14. **C. F. Gauss**, Die 4 Beweise der Zerlegung ganzer algebr. Functionen etc. (1799—1849.) Herausg. v. E. Netto. Mit 1 Taf. (81 S.) ℳ 1.50.

» 17. **A. Bravais**, Abhandlungen über symmetr. Polyeder. (1849.) Übers. und in Gemeinschaft mit P. Groth herausg. von C. u. E. Blasius. Mit 1 Taf. (50 S.) ℳ 1.—.

» 19. Üb. d. Anziehung homogener Ellipsoide. Abhandlungen von **Laplace** (1782), **Ivory** (1809), **Gauss** (1813), **Chasles** (1838) und **Dirichlet** (1839). Herausg. von A. Wangerin. (118 S.) ℳ 2.—.

» 46. Abhandlungen über Variations-Rechnung. I. Theil: Abhandlungen von **Joh. Bernoulli** (1696), **Jac. Bernoulli** (1697) und **Leonhard Euler** (1744). Herausgegeben von P. Stäckel. Mit 19 Textfiguren. (144 S.) ℳ 2.—.

» 47. —— —— II. Theil: Abhandlungen von **Lagrange** (1762, 1770), **Legendre** (1786) und **Jacobi** (1837). Herausgegeben von P. Stäckel. Mit 12 Textfiguren. (110 S.) ℳ 1.60.

» 60. **Jacob Steiner**, Die geometr. Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichts-Anstalten und zur praktischen Benutzung. (1833.) Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 25 Textfiguren. (85 S.) ℳ 1.20.

» 64. **C. G. J. Jacobi**, Über die vierfach periodischen Functionen zweier Variabeln, auf die sich die Theorie der Abel'schen Transcendenten stützt. (1834.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. (40 S.) ℳ —.70.

» 65. **Georg Rosenhain**, Abhandlung über die Functionen zweier Variabler mit vier Perioden, welche die Inversen sind der ultraelliptischen Integrale erster Klasse. (1851.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Französischen übersetzt von A. Witting. (94 S.) ℳ 1.50.

» 67. **A. Göpel**, Entwurf einer Theorie der Abel'schen Transcendenten erster Ordnung. (1847.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. (60 S.) ℳ 1.—.

» 71. **N. H. Abel**, Untersuchungen über die Reihe:

$$1 + \frac{m}{1} x + \frac{(m \cdot m - 1)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \cdots\cdots$$

(1826.) Herausgegeben von A. Wangerin. (46 S.) ℳ 1.—.

» 73. **Leonhard Euler**, Zwei Abhandlungen über sphärische Trigonometrie. Grundzüge der sphärischen Trigonometrie und allgemeine sphärische Trigonometrie. (1753 u. 1779.) Aus dem Französischen und Lateinischen übersetzt und herausgegeben von E. Hammer. Mit 6 Figuren im Text. (65 S.) ℳ 1.—.

» 77. **C. G. J. Jacobi**, Über die Bildung und die Eigenschaften der Determinanten. (De formatione et proprietatibus Determinantium.) (1841.) Herausgegeben von P. Stäckel. (73 S.) ℳ 1.20.

Nr. 78. **J. C. G. Jacobi**, Über die Functionaldeterminanten. (De determinantibus functionalibus.) (1841.) Herausgegeben von P. Stäckel. (72 S.) ℳ 1.20.

» 82. **Jacob Steiner**, Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, mit Berücksichtigung der Arbeiten alter und neuer Geometer über Porismen, Projections-Methoden, Geometrie der Lage, Transversalen, Dualität und Reciprocität etc. (1832.) I. Theil. Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 2 Tafeln und 14 Fig. im Text. (126 S.) ℳ 2.—.

» 83. —— —— II. Theil. Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 2 Tafeln und 2 Figuren im Text. (162 S.) ℳ 2.40.

» 90. **A. Bravais**, Abhandlung über die Systeme von regelmässig auf einer Ebene oder im Raum vertheilten Punkten. (1848.) Übers. u. herausgegeben von C. u. E. Blasius. Mit 2 Tafeln. (142 S.) ℳ 2.—.

» 91. **G. Lejeune Dirichlet**, Untersuchungen über verschiedene Anwendungen der Infinitesimalanalysis auf die Zahlentheorie. (1839 bis 1840.) Deutsch herausgegeben von R. Haussner. (128 S.) ℳ 2.—.

» 93. **Leonhard Euler**, Drei Abhandlungen über Kartenprojection. (1777). Mit 9 Textfig. Herausg. von A. Wangerin. (78 S.) ℳ. 1.20.

» 103. **Joseph Louis Lagrange's** Zusätze zu Euler's Elementen der Algebra. Unbestimmte Analysis. Aus dem Französischen übersetzt von A. J. von Oettingen, herausg. von H. Weber. (171 S.) ℳ 2.60.

» 107. **Jakob Bernoulli**, Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi). (1713.) I. u. II. Theil. Übersetzt und herausgegeben von R. Haussner. Mit 1 Figur im Text. (162 S.) ℳ 2.50.

» 108. —— —— III. u. IV. Theil mit dem Anhange: Brief an einen Freund über das Ballspiel (Jeu de Paume). Übersetzt und herausgegeben von R. Haussner. Mit 3 Fig. (172 S.) ℳ 2.70.

WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

(Ars conjectandi)

von

JAKOB BERNOULLI.

(1713.)

Erster und zweiter Theil.

Uebersetzt und herausgegeben

von

R. Haussner.

Mit einer Figur im Text.

LEIPZIG

VERLAG VON WILHELM ENGELMANN

1899.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

(Ars conjectandi)

von

Jakob Bernoulli.

Basel 1713.

Erster Theil.

Abhandlung über die bei Glücksspielen möglichen Berechnungen

von

Christian Huyghens.

Mit Anmerkungen von **Jakob Bernoulli.**

[**3**] Wenn bei den Spielen, welche allein vom Glück entschieden werden, auch der Ausgang ungewiss ist, so lässt sich doch immer genau berechnen, um wieviel wahrscheinlicher ein Mitspieler gewinnt als verliert. Z. B.: Wenn Jemand, um zu gewinnen, mit einem Würfel sechs Augen auf den ersten Wurf werfen muss, so ist es ungewiss, ob er gewinnt. Um wieviel wahrscheinlicher es aber ist, dass er verliert, als dass er gewinnt, ist durch die Spielbedingung selbst bestimmt und lässt sich durch Rechnung genau ermitteln. Oder: ich spiele mit einem Andern unter der Bedingung, dass derjenige den Spieleinsatz erhält, welcher zuerst drei Einzelspiele gewonnen hat. Wenn ich nun bereits ein Spiel gewonnen habe, so ist es zwar noch ungewiss, wer von uns Beiden schliesslich Sieger sein wird, aber es kann der Werth meiner Gewinnhoffnung und derjenigen meines Mitspielers genau ermittelt werden. Hieraus

lässt sich dann berechnen, um wieviel grösser der mir zufallende Theil des Spieleinsatzes sein muss als der meines Mitspielers, wenn wir uns geeinigt haben, das Spiel jetzt unvollendet aufzugeben, oder welchen Preis mir ein Dritter zahlen muss, wenn er in dem Augenblicke an meine Stelle zu treten und meine Gewinnaussichten zu übernehmen wünscht. In ähnlicher Weise lassen sich unzählige Fragen aufwerfen, wenn sich zwei, drei und mehr Personen an einem Spiele betheiligen. Da die hierbei anzuwendende Rechnung nicht allbekannt ist, aber sich oft sehr nützlich erweist, so will ich hier die Methode derselben kurz auseinandersetzen und darauf das, was sich auf Glücks- oder Würfelspiele im besonderen bezieht, entwickeln.

In beiden Fällen benutze ich den folgenden Grundsatz [1]): Beim Glücksspiele ist die Hoffnung eines Spielers, etwas zu erhalten, so hoch anzuschlagen, dass er, wenn er diese Hoffnung hat, von neuem zur gleichen Hoffnung gelangen kann, [4] wenn er unter der gleichen Bedingung spielt. Wenn z. B. Jemand ohne mein Wissen in der einen Hand drei, in der anderen Hand sieben Kugeln verbirgt und mir die Wahl lässt, aus welcher Hand ich die Kugeln nehmen will, so sage ich, dass mir dies ebensoviel werth ist, als wenn mir fünf Kugeln gegeben seien. Und wenn ich fünf Kugeln habe, so kann ich von neuem dahin gelangen, dass ich die gleiche Erwartung auf drei oder sieben Kugeln erlange: nämlich indem ich unter der gleichen Bedingung spiele.

I.

Satz. Wenn ich die Summe a oder die Summe b erwarte, von denen ich die eine ebenso leicht wie die andere erhalten kann, so ist der Werth meiner Hoffnung gleich $\frac{a+b}{2}$.

Um diesen Satz nicht nur zu beweisen, sondern ihn sogar von Grund aus aufzubauen, setze ich meine Hoffnung gleich x. Dann muss ich, wenn ich x habe, die gleiche Hoffnung wieder erlangen können, sobald ich unter der gleichen Bedingung spiele. Gesetzt nun, ich spiele mit einem Andern unter der Bedingung, dass jeder von uns Beiden die Summe x einsetzt und der Gewinner des ganzen Einsatzes dem Verlierer die Summe a geben muss. Dieses Spiel ist völlig gerecht, und

es ist klar, dass ich unter diesen Bedingungen die gleiche Erwartung habe, die Summe a zu erhalten, wenn ich nämlich das Spiel verliere, als wie die Summe $(2x - a)$, wenn ich gewinne (denn dann erhalte ich den ganzen Einsatz $2x$, von welchem ich die Summe a meinem Mitspieler geben muss). Wenn nun aber $2x - a$ ebensoviel werth wäre als b, so hätte ich auf a dieselbe Hoffnung wie auf b. Ich setze also $2x - a = b$ und erhalte dann $x = \frac{a+b}{2}$ als Werth meiner Hoffnung. Der Beweis ist leicht. Wenn ich nämlich die Summe $\frac{a+b}{2}$ habe, so kann ich mit einem Andern, welcher ebenfalls $\frac{a+b}{2}$ einsetzen will, unter der Bedingung spielen, dass der Gewinner dem Verlierer die Summe a giebt. Auf diese Weise ist meine Hoffnung, a zu erhalten (wenn ich verliere), gleich der, b zu bekommen (wenn ich gewinne); im letzteren Falle erhalte ich nämlich den ganzen Einsatz $a + b$, und von diesem habe ich dem Andern die Summe a zu geben.

Zahlenbeispiel. Wenn ich die gleiche Hoffnung habe, die Summe 3 oder 7 zu erhalten, so ist der Werth meiner Hoffnung gleich 5. Es ist klar, dass, wenn ich die Summe 5 habe, ich wieder zu der gleichen Hoffnung gelangen kann. [5] Wenn ich nämlich mit einem Andern unter der Bedingung spiele, dass jeder von Beiden 5 einsetzt und der Sieger dem Andern 3 giebt, so ist das Spiel völlig gerecht, da ich die gleiche Hoffnung auf 3 (wenn ich verliere) wie auf 7 (wenn ich gewinne) habe; im letzteren Falle erhalte ich nämlich den ganzen Spieleinsatz 10, von welchem ich dem Andern 3 geben muss.

»**Anmerkungen.** Der Verfasser dieser Abhandlung setzt am Schlusse seiner Einleitung im Allgemeinen, hier aber und in den beiden folgenden Lehrsätzen im Einzelnen die Grundlagen seines ganzen Verfahrens auseinander. Da es sehr wesentlich ist, dass das richtige Verständniss derselben gewonnen wird, so will ich versuchen, diese Grundsätze durch andere, einfachere und dem Verständniss eines jeden Lesers näher liegende Betrachtungen zu beweisen. Hierzu brauche ich nur festzusetzen: Jeder darf soviel erwarten, als er

unfehlbar erhalten wird. Denken wir uns, um den ersten Satz zu beweisen, Folgendes: Jemand hält in der einen Hand 3 (oder allgemein a) und in der anderen 7 (oder b) Kugeln; er stellt mir frei, die Kugeln, welche er in der einen Hand, und einem Anderen die, welche er in der andern Hand hält, zu nehmen. Demnach erhalten wir Beide zusammen unbedingt sicher und haben also zu erwarten die Kugeln, welche er in beiden Händen hält, das sind 10 (oder allgemein $a + b$) Kugeln. Jeder von uns Beiden hat aber den gleichen Anspruch auf das, was wir erwarten; folglich muss die ganze Hoffnung in zwei gleiche Theile getheilt und jedem die halbe Hoffnung, d. h. 5 $\left(\text{oder } \frac{a+b}{2}\right)$ Kugeln zugebilligt werden.

Zusatz. Hieraus folgt, dass, wenn in der einen Hand a, in der andern Hand nichts verborgen ist, die Hoffnung eines jeden von uns gleich $\frac{1}{2}a$ ist.

Bemerkung. Aus dem Gesagten ist zu entnehmen, dass das Wort Erwartung oder Hoffnung (Expectatio) nicht nur in dem gewöhnlichen Sinne genommen werden darf, in welchem wir etwas erwarten oder hoffen, was für uns gut und vortheilhaft ist; es kann vielmehr auch den Sinn haben, dass für uns Ungünstiges und Nachtheiliges zu befürchten ist. Das Wort bezeichnet daher unsere Hoffnung, das Beste zu erhalten, soweit als dieselbe nicht durch die Furcht, Schlimmes zu bekommen, gemässigt und abgeschwächt wird. Mithin muss das Wort so verstanden werden, dass es die Mitte bezeichnet zwischen dem Besten, was wir erhoffen, und dem Schlimmsten, was wir befürchten. Dies ist im Folgenden immer zu beachten.«

[6] II.

Satz. Wenn ich eine der Summen a, b oder c erwarten darf, von denen die eine ebenso leicht als jede der beiden andern mir zufallen kann, so ist der Werth meiner Hoffnung gleich $\frac{1}{3}(a + b + c)$.

Um diesen Satz zu finden, bezeichne ich wiederum, wie vorhin, den Werth meiner Hoffnung mit x. Wenn ich aber die Summe x habe, so muss ich die gleiche Hoffnung erhalten können, wenn das Spiel gerecht ist. Gesetzt nun, ich spiele mit zwei Andern unter der Bedingung, dass jeder von uns Dreien die Summe x einsetzt; mit dem Einen vereinbare ich ferner, dass er mir die Summe b giebt, wenn er gewinnt, und

ich ihm b auszahle, falls ich gewinne, und mit dem Dritten komme ich überein, dass er mir die Summe c zu geben hat, wenn er gewinnt, und im entgegengesetzten Falle ich ihm die gleiche Summe auszuhändigen habe. Das Spiel ist dann ein durchaus gerechtes, und ich habe unter diesen Bedingungen die gleiche Erwartung auf b, wenn der Andere gewinnt, als auf c, wenn der Dritte siegt, als auch auf $3x - b - c$, wenn ich selbst gewinne (denn in diesem Falle erhalte ich die Summe $3x$, von welcher ich die Summen b und c an meine beiden Mitspieler auszahlen muss). Wenn nun $3x - b - c = a$ wäre, so hätte ich die gleiche Hoffnung a zu erhalten, wie b oder c. Ich setze daher $3x - b - c = a$ und erhalte dann für den Werth meiner Hoffnung $x = \frac{1}{3}(a + b + c)$. Auf die nämliche Weise findet man, dass, wenn ich auf a, b, c oder d gleiche Hoffnung habe, der Werth meiner Hoffnung gleich $\frac{1}{4}(a + b + c + d)$ ist.

»**Anmerkungen.** Dieser Satz kann in anderer Weise folgendermaassen bewiesen werden: Wir nehmen an, dass wir drei Kästchen haben, und dass a Kugeln in dem ersten, b in dem zweiten und c in dem dritten Kästchen seien. Mir und zwei Andern sei nun erlaubt, dass jeder von uns ein Kästchen wähle und seinen Inhalt behalte. Dann geschieht es, dass wir Drei zusammen alle drei Kästchen nehmen und den gesammten Inhalt, das sind $a + b + c$ Kugeln behalten. Jeder hat nun ebensoviel Hoffnung als einer der Anderen, und folglich ist die Erwartung jedes Einzelnen gleich dem dritten Theile der ganzen Summe, also gleich $\frac{1}{3}(a + b + c)$. [7] Wenn ich von vier Kästchen ein beliebiges wählen darf, so folgt auf gleiche Weise, dass der Werth meiner Hoffnung gleich dem vierten Theile der Gesammtsumme, also gleich $\frac{1}{4}(a + b + c + d)$ ist. Sind es fünf Kästchen, so ist meine Hoffnung gleich $\frac{1}{5}(a + b + c + d + e)$ zu bewerthen, u. s. w.

Zusatz. Ist in einem oder mehreren der Kästchen nichts, so ist klar, dass dann der Werth meiner Hoffnung auf den Inhalt des oder der übrigen Kästchen gleich dem dritten, vierten, fünften, ... Theile sein wird, wenn insgesammt drei, vier, fünf, ... Kästchen vorhanden sind.«

III.

Satz. Wenn die Anzahl der Fälle, in denen ich die Summe a erhalte, gleich p und die Anzahl der Fälle,

in denen ich die Summe b erhalte, gleich q ist und ich annehme, dass alle Fälle gleich leicht eintreten können, so ist der Werth meiner Hoffnung gleich $\frac{pa+qb}{p+q}$.

Um diese Regel zu finden, setze ich wieder x für den Werth meiner Hoffnung. Ich muss dann, wenn ich x habe, zur gleichen Erwartung kommen können, wenn das Spiel gerecht ist. Ich nehme nun so viele Mitspieler, dass ihre Zahl, mich eingerechnet, gleich $p+q$ ist; jeder der Spieler setzt die Summe x ein, sodass die Summe $px+qx$ den gesammten Einsatz bildet, und spielt mit der gleichen Erwartung auf Gewinn. Ferner treffe ich mit q Mitspielern das Uebereinkommen, dass mir jeder von ihnen die Summe b geben muss, falls er gewinnt, und umgekehrt, dass ich jedem dieselbe Summe geben muss, wenn ich obsiege; in ähnlicher Weise einige ich mich mit den einzelnen $p-1$ übrigen Spielern dahin, dass mir jeder von ihnen die Summe a auszuzahlen hat, falls er das Spiel gewinnt, und dass umgekehrt ich jedem dieselbe Summe aushändige, wenn ich Sieger werde. Da bei diesen Bedingungen keiner der Spieler im Nachtheil ist gegenüber einem andern, so ist das Spiel ein völlig gerechtes. Offenbar habe ich nun q Fälle, in welchen ich die Summe b erhalte, $p-1$ Fälle, in welchen ich die Summe a erhalte, und einen Fall, in welchem ich $px+qx-qb-(p-1)a$ erhalte (wenn ich siege, erhalte ich nämlich den ganzen Einsatz $px+qx$ und habe davon jedem Einzelnen der q Mitspieler die Summe b und jedem der übrigen $p-1$ Mitspieler die Summe a, also im ganzen $qb+(p-1)a$ auszuzahlen). Wenn nun $px+qx-qb-(p-1)a$ gleich a selbst sein würde, so hätte ich p Hoffnungen auf a (da ich bereits $p-1$ Hoffnungen auf a hatte) [8] und q Hoffnungen auf b und so würde ich wieder zu meiner früheren Hoffnung gekommen sein. Wenn ich also

$$px+qx-qb-(p-1)a=a$$

setze, so ist der Werth meiner Hoffnung

$$x=\frac{pa+qb}{p+q},$$

wie oben behauptet worden ist.

Zahlenbeispiel. Wenn ich 3 Hoffnungen auf 13 Mark und 2 auf 8 Mark habe, so ist nach der vorstehenden Regel der Werth meiner Hoffnung gleich 11. Es lässt sich auch leicht zeigen, dass ich wieder zur gleichen Erwartung gelange, wenn ich 11 Mark habe. Ich nehme nämlich an, dass ich gegen vier andere Spieler spiele und jeder von uns fünf Theilnehmern 11 Mark einsetzt; mit zwei Spielern vereinbare ich einzeln, dass wer von ihnen gewinnt mir 8 Mark geben muss, und ich beiden je 8 Mark aushändige, wenn ich siege; mit den beiden andern Spielern einige ich mich dahin, dass jeder von ihnen mir 13 Mark geben muss, wenn er Sieger wird, und ich beiden je 13 Mark gebe, wenn ich gewinne. Dann ist das Spiel völlig gerecht, und ich habe zwei Hoffnungen auf 8 Mark, wenn einer von den beiden Spielern, welche mir 8 Mark versprochen haben, gewinnt, und drei Hoffnungen auf 13 Mark, wenn einer der beiden übrigen Spieler oder ich selbst das Spiel gewinne (im letzteren Falle erhalte ich nämlich den ganzen Einsatz, gleich 55 Mark und muss von demselben zwei Spielern je 13 Mark und den beiden andern je 8 Mark geben, sodass mir selbst 13 Mark übrig bleiben).

»**Anmerkungen.** Anders lässt sich die Regel auf folgende Weise begründen. Ich nehme wieder an, dass mit mir $p + q$ Personen am Spiele theilnehmen und dass jedem Einzelnen je ein Fall zukommt. Es seien nun ebensoviele Kästchen vorhanden, von denen jedes die Summe enthält, welche in dem einzelnen Falle erhalten wird, d. h. p Kästchen enthalten a und q Kästchen b. Jeder Mitspieler nimmt ein Kästchen; alle zusammen bekommen mithin sicher den Inhalt sämmtlicher Kästchen, das ist $pa + qb$. Da nun alle Spieler die gleiche Hoffnung haben, so muss man die Summe, welche sie zusammen erhalten, durch ihre Anzahl dividiren, und erhält für den Werth der Hoffnung jedes Spielers $\frac{pa + qb}{p + q}$. Auf gleiche Weise kann man zeigen, dass der Werth meiner Hoffnung gleich $\frac{pa + qb + rc}{p + q + r}$ ist, wenn ich in p Fällen a, in q Fällen b und in r Fällen c zu erwarten habe.

[**9**] Zusatz 1. Hieraus ergiebt sich sofort, dass, wenn mir in p Fällen a und in q Fällen nichts zukommt, meine Hoffnung gleich $\frac{pa}{p + q}$ ist.

Zusatz 2. Wenn die Anzahl der Fälle einen gemeinsamen Theiler haben, so kann offenbar der Werth meiner Hoffnung auf einen Bruch mit kleineren Zahlen im Zähler und Nenner zurückgeführt werden. Denn wenn ich a in mp Fällen und b in mq Fällen erhalte, so ist nach der obigen Regel meine Hoffnung gleich $\frac{mpa + mqb}{mp + mq}$, welcher Werth durch Division mit m gleich $\frac{pa + qb}{p + q}$ wird.

Zusatz 3. Wenn ich in p Fällen a, in q Fällen b und in r Fällen c erhalte, so kommt dies auf dasselbe hinaus, als wenn ich $p + q$ Fälle habe, in denen ich $\frac{pa + qb}{p + q}$ bekomme und r Fälle, in denen ich c erhalte. Denn nach der obigen Regel ergiebt sich als Werth meiner Hoffnung:

$$\frac{(p + q) \frac{pa + qb}{p + q} + rc}{(p + q) + r} = \frac{pa + qb + rc}{p + q + r}.$$

Zusatz 4. Wenn ich p Fälle, a zu erlangen, q Fälle b zu erhalten und r Fälle dafür habe, in meiner Lage zu bleiben, d. h. meine ursprüngliche Hoffnung zurückzuerlangen, so ist meine Hoffnung gleich $\frac{pa + qb}{p + q}$, also gleich derjenigen, welche ich haben würde, wenn keiner der r Fälle vorhanden wäre. Denn bezeichne ich mit x den Werth meiner ursprünglichen Hoffnung, so habe ich p Fälle für a, q Fälle für b und r Fälle für x. Meine Hoffnung hat also nach der Regel (Zusatz 3) den Werth $\frac{pa + qb + rx}{p + q + r}$, und da dieselbe mit x bezeichnet wurde, so ist

$$x = \frac{pa + qb + rx}{p + q + r},$$

woraus

$$px + qx + rx = pa + qb + rx$$

und schliesslich

$$x = \frac{pa + qb}{p + q}$$

folgt.

Zusatz 5. Wenn ich in p Fällen die Summe a (von welcher ich die Hälfte als Einsatz geleistet habe) und in q Fällen nichts erhalte, so bezieht sich meine Hoffnung, welche nach dem ersten Zusatze gleich $\frac{pa}{p+q}$ ist, auf den ganzen Einsatz nnd bezeichnet den Theil des gesammten Einsatzes, welcher mir von diesem anfänglich gebührt, nicht die Grösse meines Gewinnes oder Verlustes. Handelt es sich aber um diesen, so muss ich bedenken, dass ich nur $\frac{1}{2}a$ gewinne, wenn der ganze Einsatz mir zufällt, und nur $\frac{1}{2}a$ verliere, das heisst $-\frac{1}{2}a$ gewinne, wenn ich nichts von dem Einsatze erhalte. Daher ist in diesem Sinne meine Hoffnung gleich

$$\frac{p \cdot \frac{a}{2} + q \cdot \left(-\frac{a}{2}\right)}{p+q} = \frac{(p-q)\frac{a}{2}}{p+q};$$

folglich steht mir ein Gewinn in Aussicht, wenn p grösser als q ist, und ein Verlust, wenn q grösser als p ist.

[10] Zusatz 6. Wenn ich p Fälle habe, in denen ich die Summe a, und q Fälle, in denen ich die Summe b erhalte, wo ich zwar zu keiner von beiden Summen etwas beigesteuert, mir jedoch die Theilnahme am Spiel um den Preis der Summe n erkauft habe, so ist meine Hoffnung $\frac{pa+qb}{p+q}$ wiederum nicht ganz auf den Gewinn zu beziehen, sondern sie muss um den Werth n vermindert werden. Denn wenn ich meinem Mitspieler n gebe und er mir a oder b zurückgiebt, so kommt dies auf dasselbe hinaus, als wenn ich dem Andern nichts gebe und er mir $a-n$ oder $b-n$ zurückerstattet. In diesem Falle vermindert sich aber der Werth meiner Hoffnung auf

$$\frac{p(a-n)+q(b-n)}{p+q} = \frac{pa+qb}{p+q} - n,$$

welcher mir wiederum Gewinn oder Verlust in Aussicht stellt, je nachdem der positive Theil grösser als der negative ist oder umgekehrt.

Bemerkung. Ein Blick auf diese Rechnung zeigt, dass sie mit der in der Mischungsrechnung gebräuchlichen Regel, nach welcher Dinge von verschiedenem Werthe in gegebenen Mengen miteinander vermischt werden und nach dem Preise der

Mischung gefragt wird, grosse Aehnlichkeit hat, oder vielmehr dass die Rechnung in beiden Fällen ganz die gleiche ist. Denn wie die Summe aller Produkte, welche ich erhalte, wenn ich die Menge jedes der zu mischenden Dinge in den zugehörigen Preis multiplicire, dividirt durch die Summe aller einzelnen Mengen mir den Preis der Mischung bestimmt — welcher immer zwischen dem höchsten und niedrigsten Preise der einzelnen Bestandtheile liegt —, so ergiebt die Summe der Produkte aus den Zahlen der Fälle in den Gewinn des einzelnen Falles dividirt durch die Anzahl aller Fälle den Werth der Hoffnung, welcher ebenfalls immer zwischen dem zu erwartenden grössten und kleinsten Gewinne liegt. Nimmt man nun die dort für die Mengen der Bestandtheile und ihre Preise gültigen Zahlen hier für die Zahlen der Fälle und die zugehörigen Gewinne, so wird auch dieselbe Zahl dort den Preis der Mischung, hier den Werth der Hoffnung angeben. Z. B. Wenn man drei Kannen Wein zum Preise von 13 Mark mit zwei Kannen Wein zum Preise von 8 Mark mischt und 3 mit 13, 2 mit 8 multiplicirt, so erhält man als Preis aller Kannen der Mischung 55 Mark; dividirt man diese Zahl durch 5, die Anzahl der Kannen, so ergiebt sich als Preis einer Kanne der Mischung 11 Mark. Ebenso hoch ist aber nach der obigen Regel der Werth meiner Hoffnung, wenn ich 3 Fälle für 13 und 2 für 8 habe.«

[11] IV.

Aufgabe[2]. *A* spielt mit *B* unter der Bedingung, dass derjenige, welcher zuerst dreimal gewonnen hat, den Spieleinsatz erhält. Nun hat *A* bereits zweimal, *B* aber erst einmal gewonnen, und ich will wissen, wie der Spieleinsatz in gerechtem Verhältnisse getheilt werden muss, wenn Beide jetzt das Spiel abbrechen. Wieviel erhält *A*?

Um die vorgelegte Frage nach der gerechten Vertheilung des Spieleinsatzes unter die beiden Spieler, deren Gewinnhoffnungen ungleiche sind, zu beantworten, beginnen wir mit einem leichteren Falle.

Zuerst muss man die Spiele beachten, welche beiden Spielern noch fehlen[A]. Wenn sie unter einander vereinbart hätten, dass derjenige den Einsatz erhält, welcher zuerst zwanzig Einzelspiele gewonnen hat, und *A* bereits 19 Spiele gewonnen hat, der Andere aber erst 18, so ist offenbar die

Hoffnung des A auf Gewinn um ebensoviel besser wie die des B, als sie es im Falle der vorliegenden Aufgabe ist, wo A von 3 Spielen schon 2 gewonnen hat, B aber erst 1; denn in beiden Fällen fehlt dem A noch ein Spiel, dem B aber fehlen noch 2 Spiele.

Um den jedem der Spieler zukommenden Theil des Einsatzes zu berechnen, muss man erwägen, welche Fälle eintreten können, wenn sie das Spiel fortsetzen. Gewinnt A dann sofort das nächste Spiel, so hat er die vorgeschriebene Zahl von Spielen gewonnen und erhält den ganzen Einsatz, welcher durch a bezeichnet werden mag(B). Gewinnt aber B das nächste Spiel, so sind die Hoffnungen beider Spieler auf Gewinn einander gleich geworden (da ja jedem von Beiden nur noch ein Spiel fehlt) und jedem kommt daher $\frac{1}{2}a$ zu. Nun hat A aber die gleiche Aussicht, dieses erste Spiel zu gewinnen als es zu verlieren, d. h. die Erwartungen a oder $\frac{1}{2}a$ zu erhalten. Mit Rücksicht auf den Lehrsatz I erhält also A die halbe Summe beider, das ist $\frac{3}{4}a$, und es bleibt folglich seinem Mitspieler $\frac{1}{4}a$ übrig(C), welcher Theil auch direct auf die gleiche Weise wie der des A hätte gefunden werden können(D). Daraus ergiebt sich, dass derjenige Spieler, welcher den Platz des A in dem Spiele einnehmen will, ihm $\frac{3}{4}a$ geben muss, und dass derjenige, welcher ein Spiel gewinnen muss, ehe der andere 2 Spiele gewonnen hat, 3 gegen 1 einsetzen kann(E).

[12] »**Anmerkungen.** (A) [Zuerst muss man die Spiele beachten, welche beiden Spielern noch fehlen.] Es ist also bei der Berechnung der zu erwartenden Gewinne nur auf die Spiele, welche noch gemacht werden müssen, Rücksicht zu nehmen, nicht auf die bereits gemachten. Denn für jedes einzelne folgende Spiel ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Glück diejenigen Spieler begünstigt, welche es bisher bevorzugt hat, nicht grösser als die, dass es diejenigen begünstigt, welche es bisher stiefmütterlich behandelt hat. Dies glaube ich gegenüber der lächerlichen Ansicht von vielen Leuten bemerken zu müssen, welche das Glück gewissermaassen als einen Besitz betrachten, welcher eine längere Zeit bei einem Menschen bleibt und ihm gleichsam ein Recht einräumt, künftighin ein gleiches Glück zu erhoffen.

(B) [welcher durch a bezeichnet werden mag.] Unter dem Buchstaben a können wir nicht nur mit dem Verfasser (*Huyghens*) die eingesetzte Geldsumme, welche unter den Mit-

spielern im Verhältnisse der zu erwartenden Gewinne getheilt werden kann, verstehen, sondern auch ganz allgemein alles das, was zwar an sich untheilbar ist, aber doch als theilbar nach der Anzahl der Fälle, in denen es erworben oder verloren, erreicht oder nicht erreicht wird, aufgefasst werden kann, wie dies im letzten Theile dieses Buches ausführlicher gezeigt werden wird: z. B. eine Belohnung, einen Lorbeerkranz, einen Sieg, eine Lebensstellung, einen bestimmten Vermögensstand, ein öffentliches Amt, irgend eine Unternehmung, Leben oder Tod u. s. w. Wenn z. B. zwei zum Tode verurtheilten Verbrechern durch besondere Gunst des Fürsten gestattet wird, bei gleicher Hoffnung auf Gewinn um ihr Leben zu würfeln, so muss man annehmen, dass jeder die Hoffnung auf $\frac{1}{2}$ Leben oder $\frac{1}{2}$ Tod nach dem Satze I hat, sodass ein solcher Mensch im eigentlichen Sinne des Wortes halblebendig oder halbtodt genannt werden kann.

(C) [es bleibt folglich seinem Mitspieler $\frac{1}{4}a$ übrig.] D. h. der Rest des gesammten Einsatzes, da nach Abbruch des Spieles A und B zusammen sicher den ganzen Einsatz a haben müssen. Wenn aber in einem bestimmten Falle beide Spieler mehr oder weniger als das Ganze a erhalten, so kann auch die Hoffnung des einen Spielers die des andern nicht zu a ergänzen. Wenn z. B. zwei Verbrechern, welche gehängt werden sollen, gestattet wird, unter der Bedingung mit einander um ihr Leben zu würfeln, dass derjenige, welcher weniger Augen wirft als der andere, gehängt wird, dem anderen aber das Leben geschenkt wird, und dass Beide begnadigt werden, wenn sie die gleiche Zahl von Augen werfen, so hat, wie später gezeigt wird, jeder von beiden die Hoffnung $\frac{7}{12}a$ oder $\frac{7}{12}$ des Lebens. In diesem Falle folgt daraus nicht, dass die Hoffnung des andern Verbrechers $\frac{5}{12}$ des Lebens beträgt, denn da die Hoffnungen beider offenbar gleich sind, so hat auch der andere eine Hoffnung gleich $\frac{7}{12}$ des Lebens, also beide $\frac{7}{6}$ Leben, d. h. mehr als ein Leben. [13] Dies kommt daher, dass es keinen Fall giebt, in welchem nach Beendigung des Spieles nicht wenigstens einer am Leben bleibt, dass es aber einige Fälle giebt, in welchen beide Verbrecher am Leben bleiben.

(D) [welcher Theil auch direct u. s. w.] Nämlich auf folgende Weise: Wenn der Gegner B das nächste Spiel gewinnt, so sind die Hoffnungen beider Spieler wieder gleich und betragen für jeden $\frac{1}{2}a$; wenn A aber gewinnt, so erhält

jener nichts. Da B also mit gleicher Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}a$ und nichts erhalten kann, so ist der Werth seiner Hoffnung gleich $\frac{1}{4}a$ nach Zusatz 1 des Satzes III.

(E) [und dass derjenige, welcher ein Spiel u. s. w.] Man muss nachweisen, dass Derjenige, welcher in drei Fällen gewinnen und nur in einem Falle verlieren kann oder welcher drei Viertel des Einsatzes erwerben will, 3 gegen 1 einsetzen kann. Zu diesem Zwecke muss man annehmen, dass er die Aussichten dreier Spieler übernimmt. Denn wenn vier Spieler mit gleicher Aussicht auf Gewinn spielen und jeder von ihnen 1 einsetzt, so hat jeder seinen Einsatz, also den vierten Theil des ganzen Einsatzes zu erwarten. Nach Zusatz 1 des Satzes III haben also jene drei Spieler $\frac{3}{4}$ des Einsatzes und der vierte $\frac{1}{4}$ desselben zu erwarten. Da die ersteren aber auch 3 eingesetzt haben, während der letztere nur 1 beigesteuert hat, so ist es völlig gerecht, dass derjenige, welcher an die Stelle der drei Spieler treten will, d. h. welcher dreimal mehr als sein Mitspieler gewinnen will, auch dreimal mehr einsetzt. Oder auf andere Weise: Wer drei Fälle hat, in denen er gewinnt, und nur einen Fall, in dem er verliert, kann eben so oft dreimal gewinnen, als der Andere nur einmal. Wenn also das Spiel gerecht sein soll, so muss jener Spieler mit der dreifachen Gewinnaussicht ebensoviel gewinnen als der andere mit seiner einfachen, was nur der Fall ist, wenn der erstere dreimal soviel als der letztere einsetzt. Und so kann man allgemein zeigen, dass ein Spieler um so mehr billiger Weise einsetzen muss, je grösser seine Hoffnung auf Gewinn ist, wenn die Aussichten der Spieler gleich sein sollen.«

V.

Aufgabe. Dem Spieler A fehlt, um zu gewinnen, noch ein Spiel; seinem Gegner B aber fehlen noch drei Spiele dazu. Es soll der Einsatz in gerechter Weise getheilt werden.

Wir betrachten wiederum, wie die Verhältnisse liegen, wenn A oder sein Gegner B das erste Spiel gewinnen. Wenn A gewinnt, so erhält er den Einsatz a. Gewinnt aber B, [**14**] so fehlen ihm noch zwei Spiele und dem A noch ein Spiel. Beide würden sich dann in der gleichen Lage befinden, wie sie in der vorigen Aufgabe angenommen war, und A würde $\frac{3}{4}a$ erhalten, wie dort gezeigt wurde. Er kann also ebenso leicht a,

wie $\frac{3}{4}a$ erhalten, was nach dem Satze I für ihn $\frac{7}{8}a$ ergiebt; seinem Mitspieler B bleibt nur $\frac{1}{8}a$ übrig, sodass die Hoffnung des A sich zu der des B wie 7 : 1 verhält.

Wie aber bei dieser Rechnung auf die vorhergehende zurückgegriffen ist, so wird diese wieder weiter benutzt, wenn wir annehmen, dass dem A ein Spiel fehlt und seinem Gegner B vier Spiele fehlen. Auf gleiche Weise ergiebt sich dann, dass A $\frac{15}{16}$ und B $\frac{1}{16}$ des Einsatzes erhalten muss.

»**Anmerkung.** Aus der Reihe der Brüche $\frac{3}{4}a$, $\frac{7}{8}a$, $\frac{15}{16}a$, welche in der voraufgehenden und in dieser Aufgabe gefunden worden sind, erkennt man weiter, dass, wenn dem B noch 5 Spiele zum Gewinnen fehlen, die Erwartung des A gleich $\frac{31}{32}a$ ist; dass sie gleich $\frac{63}{64}a$ ist, wenn dem B noch 6 Spiele fehlen, und gleich $\frac{127}{128}a$, wenn dem B noch 7 Spiele fehlen. Allgemein[3]), wenn dem A ein Spiel fehlt, dem B aber noch n Spiele, so verhält sich die Erwartung des A zu der des B wie $(2^n - 1) : 1$.«

VI.

Aufgabe. Dem Spieler A fehlen zwei Spiele und seinem Mitspieler B drei Spiele.

Nach dem ersten Spiele fehlen entweder dem A noch ein Spiel und dem B noch drei Spiele (in welchem Falle dem A nach dem vorigen Satze $\frac{7}{8}a$ zufallen würde), oder es fehlen beiden Spielern noch je zwei Spiele (in welchem Falle dem A offenbar $\frac{1}{2}a$ zukommt, da dann beider Hoffnungen gleich sind). Nun ist für A die Möglichkeit, das erste Spiel zu gewinnen, die gleiche wie die es zu verlieren, daher hat er die gleiche Hoffnung auf $\frac{7}{8}a$ und auf $\frac{1}{2}a$, woraus nach Satz I für A sich $\frac{11}{16}a$ ergiebt. Es gebühren dem A mithin 11 Theile und seinem Gegner B nur 5 Theile des Einsatzes.

[15]

VII.

Aufgabe. Dem Spieler A fehlen zwei Spiele und seinem Mitspieler B vier Spiele.

Nach dem ersten Spiele sind zwei Fälle möglich: Entweder hat A das erste Spiel gewonnen und muss also noch ein Spiel gewinnen, während B noch vier Spiele zu gewinnen hat, oder A hat das erste Spiel verloren und muss noch zwei

Spiele, B noch drei Spiele gewinnen. A hat also auf $\frac{15}{16}q$ und auf $\frac{11}{16}q$ die gleiche Hoffnung; er erhält daher, nach Satz I, $\frac{13}{16}q$. Daraus leuchtet unmittelbar ein, dass A günstigere Aussichten hat(F), wenn er zwei Spiele und B vier zu gewinnen hat, als wenn er nur ein Spiel gewinnen muss, ehe B zwei gewonnen hat. Denn in diesem letzteren Falle ist der Antheil des A, welcher ein Spiel gegen zwei des B gewinnen muss, gleich $\frac{3}{4}q$ nach Satz IV, was weniger ist als $\frac{13}{16}q$.«

»**Anmerkungen.** (F) [Daraus leuchtet u. s. w.] Es hat derjenige Spieler noch günstigere Aussichten, welcher drei Spiele gewinnen muss, während der andere noch sechs zu gewinnen hat, denn es ergiebt sich für seinen Theil $\frac{219}{256}q$, was mehr als $\frac{13}{16}q$ ist. Derjenige, welcher ein Spiel zu gewinnen unternimmt, ehe der andere vier Spiele gewonnen hat, besitzt nicht die gleiche Hoffnung wie jener, welcher zwei Spiele gewinnen muss, bevor der andere acht Spiele gewonnen hat, sondern die Erwartung desjenigen, welcher zwei Spiele gewinnen muss, ehe sein Mitspieler sechs Spiele gewonnen hat. Wenn die Rechnung nicht eines Besseren belehrte, so möchte vielleicht Niemand glauben, dass nicht zwischen den Hoffnungen zweier Spieler das gleiche Verhältniss bestehen muss, wenn das Verhältniss der noch fehlenden Spiele das gleiche ist. Dadurch müssen wir uns mahnen lassen, dass wir mit der Antwort vorsichtig sein müssen und unsere Ueberlegungen nicht auf scheinbare Analogien gründen dürfen, wie es häufig genug selbst von sonst sehr klugen Leuten geschieht.

Es mag mir gestattet sein, hier eine Tafel*) für zwei Spieler A und B anzufügen; eine ähnliche Tafel hat der Verfasser (*Huygens*) weiter unten nach Aufgabe IX für drei Spieler gegeben.

---

*) Die Tafel giebt den Theil des Einsatzes an, welcher dem A zukommt, wenn das Spiel in dem Augenblick abgebrochen wird, wo, um den ganzen Einsatz zu gewinnen, dem A noch 1, 2, ..., 9 Spiele und dem B noch 1, 2, ..., 7 Spiele fehlen. *H.*

[16] *Tafel für 2 Spieler.*

Anzahl der Spiele, welche noch fehlen	dem Spieler *B*						
	1	2	3	4	5	6	7
dem Spieler *A*							
1	1 : 2	3 : 4	7 : 8	15 : 16	31 : 32	63 : 64	127 :
2	1 : 4	4 : 8	11 : 16	26 : 32	57 : 64	120 : 128	247 :
3	1 : 8	5 : 16	16 : 32	42 : 64	99 : 128	219 : 256	466 :
4	1 : 16	6 : 32	22 : 64	64 : 128	163 : 256	382 : 512	848 :
5	1 : 32	7 : 64	29 : 128	93 : 256	256 : 512	638 : 1024	1486 :
6	1 : 64	8 : 128	37 : 256	130 : 512	386 : 1024	1024 : 2048	2510 :
7	1 : 128	9 : 256	46 : 512	176 : 1024	562 : 2048	1586 : 4096	4096 :
8	1 : 256	10 : 512	56 : 1024	232 : 2048	794 : 4096	2380 : 8192	6476 :
9	1 : 512	11 : 1024	67 : 2048	299 : 4096	1093 : 8192	3473 : 16384	9949 :

Diese Tafel kann mit grosser Leichtigkeit beliebig weit fortgesetzt werden: Die Fortsetzung der ersten Zeile geschieht nach der in der Anmerkung zu der Aufgabe V gegebenen Regel. In der ersten Columne erhält man die einzelnen Glieder durch fortgesetztes Halbiren von $\frac{1}{2}$. Jedes andere Glied, welches weder der ersten Zeile noch der ersten Columne angehört, erhält man dadurch, dass man die Glieder, welche dem gesuchten in derselben Zeile und in derselben Columne unmittelbar vorangehen, zu einander addirt und die Summe halbirt. Die Construction der Tafel ist nach dem eben Gesagten hinreichend deutlich. Wie aber die Hoffnungen zweier Spieler, denen noch eine beliebige Anzahl von Spielen fehlen, ohne Fortsetzung der Tafel ermittelt werden können, wird weiter unten im Anhange zu Kapitel IV des zweiten Theiles gezeigt werden.«

[17] **VIII.**

Aufgabe. Wir nehmen jetzt an, dass drei Personen *A*, *B* und *C* mit einander spielen und dass *A* und *B* je ein Spiel fehlt, während dem *C* zwei Spiele fehlen.

Damit man den dem *A* zukommenden Antheil findet, muss man wiederum auf das sein Augenmerk richten, was ihm zukommt, wenn er selbst oder einer der beiden andern Spieler das erste Spiel gewinnt. Gewinnt er selbst, so erhält er den Einsatz *a*. Gewinnt aber *B*, so erhält *A* nichts, da ja dann

B das Spiel beendigt haben würde. Wenn schliesslich C gewinnt, so fehlt jedem der drei Spieler noch ein Spiel, und es kommt daher jedem von ihnen $\frac{1}{3}a$ zu. Also hat A einen Fall für a, einen für Null und einen für $\frac{1}{3}a$ (da jeder der drei Spieler mit gleicher Wahrscheinlichkeit das erste Spiel gewinnen kann), was nach Satz II für ihn $\frac{4}{9}a$ ausmacht. In gleicher Weise ergiebt sich, dass $\frac{4}{9}a$ dem B zukommen, und folglich bleibt $\frac{1}{9}a$ für C übrig. Man hätte auch den Theil des C für sich berechnen und dann die Antheile der Anderen finden können (G).

»**Anmerkung.** (G.) [Man hätte auch den Theil des C u. s. w.] Nämlich auf folgende Weise: Gewinnt C selbst das erste folgende Spiel, so ist seine Hoffnung auf Gewinn gleich $\frac{1}{3}a$. Wenn aber A oder B das nächste Spiel gewinnen, so erhält C nichts. Folglich hat er einen Fall für $\frac{1}{3}a$ und zwei Fälle für nichts, was nach Zusatz 1 des Satzes III für ihn $\frac{1}{9}a$ ergiebt.«

IX.

Satz. Um bei beliebig vielen Spielern, von denen dem einen mehr, dem andern weniger Spiele noch fehlen, die Hoffnung jedes einzelnen zu berechnen, muss man ermitteln, was dem Spieler, dessen Antheil bestimmt werden soll, zukommt, wenn er selbst oder irgend ein andrer Spieler das nächstfolgende Spiel gewinnt. Addirt man die so erhaltenen einzelnen Theile zu einander und dividirt man die Summe durch die Anzahl der Spieler, so erhält man den gesuchten Antheil des betreffenden Spielers.

[**18**] Nehmen wir an, dass drei Spieler A, B, C am Spiele theilnehmen und dass dem A noch ein Spiel fehlt, während dem B und dem C noch je zwei Spiele fehlen. Es soll der Theil des Einsatzes gefunden werden, welcher dem B zukommt. Der ganze Einsatz werde mit q bezeichnet.

Zunächst muss man bestimmen, was dem B zukommt, wenn er selbst oder A oder C das nächste Spiel gewinnt.

Gewinnt A, so hat er dadurch das Spiel beendigt und folglich erhält B nichts. Wenn B gewinnt, so fehlt ihm dann ebenso wie dem A noch ein Spiel, dem C aber fehlen noch zwei Spiele. Nach der Aufgabe VIII kommt dem B in diesem Falle $\frac{4}{9}q$ zu.

Wenn endlich C das nächstfolgende Spiel gewinnt, so fehlt sowohl dem A, als dem C ein Spiel, während dem B noch zwei Spiele fehlen; nach der Aufgabe VIII gebührt dem B dann $\frac{1}{9}q$. Da nun B auf 0, $\frac{4}{9}q$ und $\frac{1}{9}q$ die gleiche Hoffnung hat, so folgt aus Satz II, dass der ihm gebührende Theil des Einsatzes gleich $\frac{0 + \frac{4}{9}q + \frac{1}{9}q}{3} = \frac{5}{27}q$ ist.

Um aber in irgend einem beliebigen Falle zu finden, was jedem einzelnen Spieler gebührt, wenn er selbst oder einer der Mitspieler das nächstfolgende Spiel gewinnt, muss man zunächst einfachere Fälle untersuchen und mit Hülfe dieser die darauf folgenden verwickelteren Fälle. Denn wie der letzte Fall nicht gelöst werden konnte, bevor der Fall der Aufgabe VIII, in welchem 1, 1, 2 Spiele noch fehlten, erledigt war, so lässt sich auch der jedem Spieler zukommende Antheil in dem Falle, wo noch 1, 2, 3 Spiele fehlen, nicht berechnen, wenn nicht zuvor die beiden Fälle, in welchen noch 1, 2, 2 Spiele und 1, 1, 3 Spiele fehlen, erledigt worden sind. Der erstere dieser beiden Fälle ist soeben behandelt worden, und der letztere kann in gleicher Weise nach der Aufgabe VIII erledigt werden. Auf diese Weise kann man allmählich alle Fälle, welche auf der folgenden Tafel verzeichnet sind, und beliebige andere ausrechnen.

[19] *Tafel für 3 Spieler.*

	A.	*B.*	*C.*	*A.*	*B.*	*C.*	*A.*	*B.*	*C.*	*A.*	*B.*	*C.*
Anzahl der fehlenden Spiele:	1.	1.	2.	1.	2.	2.	1.	1.	3.	1.	2.	3.
Gewinnantheile:	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{17}{27}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{13}{27}$	$\frac{13}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{19}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{2}{27}$
Anzahl der fehlenden Spiele:	1.	1.	4.	1.	1.	5.	1.	2.	4.	1.	2.	5.
Gewinnantheile:	$\frac{40}{81}$	$\frac{40}{81}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{121}{243}$	$\frac{121}{243}$	$\frac{1}{243}$	$\frac{178}{243}$	$\frac{58}{243}$	$\frac{7}{243}$	$\frac{542}{729}$	$\frac{179}{729}$	$\frac{8}{729}$
Anzahl der fehlenden Spiele:	1.	3.	3.	1.	3.	4.	1.	3.	5.			
Gewinnantheile:	$\frac{65}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{616}{729}$	$\frac{82}{729}$	$\frac{31}{729}$	$\frac{629}{729}$	$\frac{87}{729}$	$\frac{13}{729}$			
Anzahl der fehlenden Spiele:	2.	2.	3.	2.	2.	4.	2.	2.	5.			
Gewinnantheile:	$\frac{34}{81}$	$\frac{34}{81}$	$\frac{13}{81}$	$\frac{338}{729}$	$\frac{338}{729}$	$\frac{53}{729}$	$\frac{353}{729}$	$\frac{353}{729}$	$\frac{23}{729}$			
Anzahl der fehlenden Spiele:	2.	3.	3.	2.	3.	4.	2.	3.	5.			
Gewinnantheile:	$\frac{133}{243}$	$\frac{55}{243}$	$\frac{55}{243}$	$\frac{451}{729}$	$\frac{195}{729}$	$\frac{83}{729}$	$\frac{1433}{2187}$	$\frac{635}{2187}$	$\frac{119}{2187}$			

[20] Ueber das Würfelspiel[4]).

Bei dem Würfelspiele können Fragen folgender Art aufgeworfen werden: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel 6 Augen oder eine andere Zahl von Augen zu werfen? Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln zwei Sechsen oder mit drei Würfeln drei Sechsen zu werfen? Und andere derartige Fragen.

Um diese Fragen zu beantworten, muss man Folgendes beachten. Zunächst giebt es sechs verschiedene Würfe mit einem Würfel, von denen jeder gleich leicht fallen kann, wenn der Würfel die Gestalt eines genauen Cubus besitzt, was wir annehmen. Ferner sind mit zwei Würfeln 36 verschiedene Würfe möglich, von denen ebenfalls jeder eben so leicht als ein anderer fallen kann. Denn mit jedem Wurfe des einen Würfels kann jeder der sechs Würfe des anderen Würfels zusammentreffen, was $6 \times 6 = 36$ Würfe ergiebt. Bei drei Würfeln sind 216 einzelne Würfe möglich, da mit jedem der 36 Würfe zweier Würfel jeder der 6 Würfe des dritten Würfels zusammentreffen kann, was $6 \times 36 = 216$ Würfe ergiebt. Auf gleiche Weise erkennt man, dass mit 4 Würfeln $6 \times 216 = 1296$ Würfe möglich sind, und so kann man die Anzahl der mit beliebig vielen, z. B. n Würfeln möglichen Würfe berechnen, indem man die Anzahl der mit $(n - 1)$ Würfeln möglichen Würfe mit 6 multiplicirt, was 6^n Würfe ergiebt.

Weiter ist zu berücksichtigen, dass mit zwei Würfeln nur ein einziger Wurf möglich ist, welcher 2 oder 12 Augen zeigt, dass aber zwei Würfe möglich sind, welche 3 oder 11 Augen aufweisen. Bezeichnet man nämlich die beiden Würfel mit W_1 und W_2, so sind für 3 Augen die beiden Fälle möglich, dass die Augenzahl auf W_1 eins, auf W_2 zwei oder auf W_1 zwei, auf W_2 eins ist; um 11 zu werfen, müssen auf W_1 sechs, auf W_2 fünf oder auf W_1 fünf, auf W_2 sechs Augen erscheinen. Für den Wurf 4 sind drei Möglichkeiten vorhanden, nämlich 1 auf W_1 und 3 auf W_2, oder 3 auf W_1 und 1 auf W_2, oder schliesslich 2 auf W_1 und 2 auf W_2.

Für zehn Augen ergeben sich ebenfalls drei Würfe.

Für fünf oder neun Augen ergeben sich vier Würfe.

Für sechs oder acht Augen ergeben sich fünf Würfe.

Für sieben Augen ergeben sich sechs Würfe.

[21]

Bei drei Würfeln ergeben sich für

Augen			Würfe
3	oder	18	1
4	»	17	3
5	»	16	6
6	»	15	10
7	»	14	15
8	»	13	21
9	»	12	25
10	»	11	27

»**Anmerkungen.** Was hier der Verfasser (*Huygens*) für zwei und drei Würfel dargelegt hat, lässt sich auch weiter auf vier, fünf und mehr Würfel ausdehnen und die Anzahl der Würfe, welche möglich sind, um eine beliebige Anzahl von Augen zu werfen, ganz ähnlich berechnen. Weil es aber leicht möglich ist — zumal wenn viele Würfel vorhanden sind — dass man eine grössere Zahl von Würfen übersieht, wenn man bei ihrer Aufzählung nicht eine bestimmte Ordnung innehält, so will ich das Verfahren angeben, welches man anwenden muss, um sicher zu sein, alle Fälle gefunden und keinen Fall ausgelassen zu haben. Zunächst muss man untersuchen, auf wieviele verschiedene Arten die zu werfende Anzahl von Augen sich in so viele Summanden zerlegen lässt, als Würfel vorhanden sind. Keiner der Summanden darf grösser als 6 sein. Dann muss man ermitteln, wie viele Würfe jeder einzelnen Zerlegung entsprechen. Da sich dies Alles aber besser an einem Beispiele, als durch allgemeine Regeln erläutern lässt, so will ich bestimmen, wie viele Würfe möglich sind, wenn mit 4 Würfeln 12 Augen geworfen werden sollen.

Zu dem Zwecke fange ich mit den vier Einheiten an, indem ich 1, 1, 1, 1 hinschreibe; dann vermehre ich die erste Eins durch fortgesetzte Addition von 1, bis ich 6 und also nun 6, 1, 1, 1 erhalten habe. Da aber die Summe dieser vier Zahlen noch nicht gleich der vorgegebenen Zahl 12 ist, so erhöhe ich mit der ersten Eins gleichzeitig auch die zweite auf 2, auf 3 und schreibe 2, 2, 1, 1, dann 3, 3, 1, 1; erhöhe ich hier wieder die erste Zahl auf 6, so erhalte ich 6, 2, 1, 1 und 6, 3, 1, 1. Da aber die Summen beide Zahlenreihen noch nicht 12 ergeben, so schreibe ich weiter 4, 4, 1, 1 und erhalte hieraus durch Erhöhen der ersten Zahl 6, 4, 1, 1. Diese Zahlenreihe liefert die Summe 12, und deshalb merke ich mir dieselbe an. Dann schreibe ich weiter 5, 5, 1, 1,

welche Zahlenreihe ich ebenfalls anmerke, da ihre Summe gleich 12 ist. 6, 5, 1, 1 und 6, 6, 1, 1 liefern Summen, welche grösser als 12 sind, [22] weshalb diese Reihen ausser Betracht bleiben. Jetzt erhöhe ich auch die dritte, bis jetzt unberührt gebliebene Einheit und schreibe 2, 2, 2, 1. Erhöhe ich nun wieder die erste Zwei auf 6, so ist die Summe der Zahlen 6, 2, 2, 1 immer noch kleiner als 12. Deshalb gehe ich über zu 3, 3, 2, 1 und erhöhe wieder die erste Zahl auf 6; die Reihe 6, 3, 2, 1 liefert die Summe 12 und ist deshalb anzumerken. Dann vergrössere ich in dieser Reihe die zweite Zahl um 1, während ich die erste um 1 vermindere, und erhalte so die brauchbare Reihe 5, 4, 2, 1. Nun erhöhe ich die zweite Zahl nicht weiter auf 5 oder 6, da die erste Zahl wieder auf 4 oder 3 erniedrigt werden müsste, um 12 als Summe zu erhalten, und dann einige der früheren Zerlegungsarten wieder zum Vorschein kommen würden. Deshalb muss man immer darauf achten, dass keine der vorangehenden Zahlen kleiner ist als eine der folgenden. Ich gehe jetzt über zu 3, 3, 3, 1 und erhöhe die erste Zahl auf 5; dann ist 5, 3, 3, 1 eine brauchbare Zahlenreihe, welche, wenn ich die erste Zahl um 1 vermindere und die zweite um ebensoviel erhöhe, eine weitere brauchbare Zahlenreihe, nämlich 4, 4, 3, 1 liefert. Da nun offenbar keine der drei ersten Zahlen weiter vergrössert werden kann, ohne dass entweder die Summe aller vier Zahlen grösser als 12 oder eine der vorangehenden Zahlen grösser als eine der folgenden ist und also frühere Zerlegungsarten wiederkehren, so erhöhe ich nun auch die letzte Einheit, welche bisher unverändert geblieben ist, auf 2 und schreibe 2, 2, 2, 2. Wenn ich hier die erste Zahl auf 6 erhöhe, so ist die Reihe 6, 2, 2, 2 eine brauchbare, da ihre Summe gleich 12 ist. Durch Verminderung der ersten und Vergrösserung der zweiten Zahl um 1, bez. 2 ergeben sich die brauchbaren Zahlenreihen 5, 3, 2, 2 und 4, 4, 2, 2; würde ich dieses Verfahren fortsetzen, so würde eine der früheren Zerlegungsarten wieder auftreten. Deshalb gehe ich zu 3, 3, 3, 2 über und erhöhe die erste Zahl um 1, wodurch ich die brauchbare Zahlenreihe 4, 3, 3, 2 erhalte. Da ich aus den gleichen Gründen wie vorhin jetzt keine der drei ersten Zahlen weiter erhöhen kann, so vermehre ich deshalb die letzte Zahl um 1 und schreibe 3, 3, 3, 3, welche Zahlenreihe wieder die Summe 12 liefert. Hiermit sind sämmtliche Zerlegungsarten gefunden, da die letzte Zahl nicht weiter erhöht

werden kann, ohne dass eine der voraufgehenden Zahlen vermindert wird [**23**] und also eine der früheren Zerlegungsarten wiederkehrt. Es giebt also im Ganzen 11 Zerlegungsarten, welche in der Reihenfolge ihrer Auffindung in der folgenden Tafel verzeichnet sind.

Zerlegungsarten	Anzahl der Würfe
6 4 1 1	12
5 5 1 1	6
6 3 2 1	24
5 4 2 1	24
5 3 3 1	12
4 4 3 1	12
6 2 2 2	4
5 3 2 2	12
4 4 2 2	6
4 3 3 2	12
3, 3 3 3	1
	Summe: 125

Auf gleiche Weise lassen sich alle möglichen Zerlegungsarten jeder beliebigen Anzahl von Augen, welche mit beliebig vielen Würfeln geworfen werden soll, finden. Man muss nur beachten, dass die Augenzahl des ersten Würfels auf 6 erhöht sein muss, ehe die des zweiten Würfels auch nur um eine Einheit vermehrt wird; ferner dass die Augenzahl des zweiten Würfels auf 6 erhöht sein muss, ehe die des dritten um eine Einheit erhöht wird; ferner dass die Augenzahl des dritten Würfels erhöht sein muss, bevor die des vierten Würfels vermehrt wird, dass die Augenzahl des vierten Würfels erhöht sein muss, ehe die des fünften erhöht wird, und so fort.

Nachdem die verschiedenen Zerlegungsarten gefunden sind, bleibt nur noch übrig, die Anzahl der Würfe, welche zu jeder einzelnen Zerlegung gehören, zu bestimmen; denn jeder solchen Zerlegung können mehrere Würfe entsprechen, da diese oder jene Zahl auf diesem oder jenem Würfel erscheinen kann. Bezeichne ich die vier Würfel mit W_1, W_2, W_3, W_4, so können bei der ersten Zerlegungsart 6, 4, 1, 1 offenbar 6 Augen auf W_1, 4 Augen auf W_2 oder W_3 oder W_4 oder auch 6 Augen auf W_2, 4 Augen auf W_1 oder W_3 oder W_4, u. s. w. zum Vorschein kommen. Daraus ergeben sich ebenso viele Würfe, als jene vier Zahlen in verschiedener Reihenfolge auf einander

folgen können. Bei den übrigen Zerlegungen ist dasselbe zu beachten. Nun können die Zahlen 6, 4, 1, 1, von denen zwei verschieden und zwei gleich sind, in zwölffach verschiedener Reihenfolge angeordnet werden. Die folgende Zerlegung 5, 5, 1, 1, bei welcher die beiden ersten Zahlen und die beiden letzten unter einander gleich sind, gestattet nur sechs verschiedene Anordnungen ihrer Zahlen. Die dritte Zerlegung 6, 3, 2, 1, bei welcher sämmtliche Zahlen von einander verschieden sind, lässt 24 verschiedene Anordnungen zu, wie sich aus der Lehre von den Combinationen und Permutationen, die ich im zweiten Theile behandeln werde, ergiebt. Addirt man schliesslich alle den einzelnen Zerlegungsarten entsprechenden Zahlen der Würfe, so erhält man 125, und diese Zahl giebt alle Würfe an, welche mit vier Würfeln zur Erlangung von 12 Augen möglich sind.

Da aber diese Methode, die Anzahl der Würfe mit mehreren Würfeln zu berechnen, überaus langweilig und zeitraubend ist, [**24**] so will ich weiter zeigen, durch welchen Kunstgriff dieses Ziel nicht nur für eine bestimmte Anzahl von Augen, sondern für eine ganz beliebige Anzahl mit Hülfe der folgenden Tafel erreicht werden kann. Diese Tafel lässt sich nicht nur leicht aufbauen, sondern sie führt auch die Gesetzmässigkeit der Reihe, welche die Zahlen der Würfe bilden, deutlich vor Augen. Ihre Construction ist die folgende: Man schreibe die Zahlen aller Augen, welche mit einer bestimmten Zahl von Würfeln überhaupt geworfen werden können, von der kleinsten bis zur grössten der Reihe nach auf, z. B. 4, 5, 6, 7, . . ., 24 bei vier Würfeln oder 5, 6, 7, 8, . . ., 30 bei fünf Würfeln, u. s. w. Unter die sechs ersten dieser Zahlen schreibe man sechs Einsen, unter diese wieder sechs Einsen, unter diese wieder sechs Einsen und so fort, bis man sechs Reihen Einsen erhalten hat, und zwar schreibe man die Reihen so, dass man jede Zeile, von der zweiten an, um eine Stelle nach rechts gegen die vorhergehende einrückt. Hierauf addire man die untereinanderstehenden Einsen jeder Columne, wodurch man die Zahlen 1, 2, 3, 4, . . . erhält. Von diesen Zahlen bilde man sich wieder sechs Zeilen in der Weise, dass jede folgende um eine Stelle gegen die vorhergehende eingerückt ist. Addirt man dann die Zahlen jeder Columne, so ergeben sich die Zahlen 1, 3, 6, 10, ... Diese Zahlen schreibe man in ähnlicher Weise wieder sechsmal untereinander und addire wieder die Zahlen jeder Columne. Dieses Verfahren setze man so lange

fort, bis man nach der letzten Addition so viele Zahlen erhalten hat, als mit einer bestimmten Anzahl Würfel verschiedene Augenzahlen geworfen werden können. Die einzelnen Zahlen liefern die sämmtlichen Würfe, welche die darüberstehenden Augenzahlen ergeben. So ist mit vier Würfeln nur ein Wurf möglich, welcher 4 oder 24 Augen ergiebt; es sind 4 Würfe möglich, welche 5 oder 23 Augen liefern, 10 Würfe für 6 oder 22 Augen, 20 Würfe für 7 oder 21 Augen, u. s. w. Das Constructionsverfahren der Tafel ist für jeden Leser, welcher aufmerksam den Auseinandersetzungen gefolgt ist, leicht verständlich. Da nämlich jeder einzelne hinzukommende Würfel die Zahl der mit den bereits vorhandenen Würfeln möglichen Würfe versechsfacht, so ist klar, dass man diese Zahlen sechsmal wiederholen und addiren muss. Da aber die Anzahl der Augen, welche jenen einzelnen Würfen entsprechen, um 1 oder 2 oder 3 oder ... vermehrt werden, je nachdem der hinzugekommene Würfel 1 oder 2 oder 3 oder ... Augen zeigt, so ist auch klar, dass jede Zahlenreihe um eine Stelle weiter nach rechts gerückt werden muss, damit jeder Zahl der Würfe eine Augenzahl entspricht, welche um eine Einheit grösser ist, als sie ihr in der voraufgehenden Reihe entsprach.

Ich bemerke noch, dass wegen Raummangels nicht alle Augenzahlen, welche mit 5 oder 6 Würfeln geworfen werden können, in die Tafel aufgenommen worden sind; die fehlenden lassen sich aber leicht ergänzen durch die parallelen Zahlen: denn je zwei Augenzahlen, welche von den beiden Enden gleichweit entfernt sind (und welche ich parallele Zahlen nenne), lassen die gleiche Anzahl von Würfen zu (vergl. die gegenüberstehende Tafel).

[**25**] Es ist nicht unpassend, hier anzugeben (da es doch einmal geschehen muss), wieviele Würfe bei drei Würfeln auf allen drei oder wenigstens auf zwei Würfeln dieselbe Anzahl von Augen zeigen (die Franzosen nennen solche Würfe *rafles* und *doublets*). Offenbar ist nur je ein Wurf möglich, bei welchem dreimal sechs Augen oder dreimal fünf Augen oder dreimal vier Augen oder ... fallen können; es giebt also nur sechs Würfe, bei welchen alle drei Würfel dieselbe Zahl zeigen. Dagegen giebt es fünfzehn Würfe, durch welche man zwei gleiche Zahlen, z. B. zwei Sechsen erhalten kann. Bezeichnet man wieder die Würfel mit W_1, W_2, W_3, so können die beiden Sechsen sich sowohl auf

Tafel*).

Anzahl der Würfel	Anzahl der Augen.																					
I.	1	2	3	4	5	6																
II.	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12											
III.	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18						
IV.	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
V.	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	u. s. w.
VI.	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	u. s. w.
	Anzahl der Würfe.																					
I.	1	1	1	1	1	1																
		1	1	1	1	1	1															
			1	1	1	1	1	1														
				1	1	1	1	1	1													
					1	1	1	1	1	1												
						1	1	1	1	1	1											
II.	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1											
III.	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1						
IV.	1	4	10	20	35	56	80	104	125	140	146	140	125	104	80	56	35	20	10	4	1	
V.	1	5	15	35	70	126	205	305	420	540	651	735	780	780	735	651	540	420	305	205	126	u. s. w.
VI.	1	6	21	56	126	252	456	756	1161	1666	2247	2856	3431	3906	4221	4332	4221	3906	3431	2856	2247	u. s. w.

*) *Bernoulli*'s Tafel zeigt auch die Entstehung der vier letzten Zahlenreihen in derselben ausführlichen Weise, wie die obige Tafel die Entstehung der für zwei Würfel gültigen Zahlen. Um Platz zu sparen, empfahl sich die Kürzung, zumal *Bernoulli*'s Schilderung des Verfahrens mehr als genügend ausführlich ist. *H.*

W_1 und W_2, als auf W_1 und W_3, als auch auf W_2 und W_3 vorfinden, was drei Fälle giebt. Da in jedem dieser Fälle die Zahl auf dem dritten Würfel eine andere als auf den beiden ersten Würfeln sein muss, so giebt es fünf verschiedene Möglichkeiten. Daher gilt es $5 \cdot 3$ oder 15 Würfe mit zwei Sechsen. Dasselbe gilt für die Würfe mit zwei Fünfen, zwei Vieren, u. s. w., folglich giebt es im Ganzen $6 \cdot 15 = 90$ Würfe, bei welchen auf zwei Würfeln die gleiche Augenzahl sich vorfindet. Weil ferner mit drei Würfeln im Ganzen 216 Würfe gethan werden können, so folgt, dass die übrigen 120 Würfe einfache sind, deren Anzahl auch direct hätte gefunden werden können.«

X.

Aufgabe. Es ist die Anzahl der Würfe zu bestimmen, mit welcher A es wagen kann, mit einem Würfel eine Sechs zu werfen.

Will A gleich mit dem ersten Wurfe sechs Augen werfen, so hat er offenbar nur einen Fall, in welchem er gewinnt und den Einsatz erhält, dagegen fünf Fälle, in welchen er verliert und nichts bekommt. Es sind also fünf Fälle gegen ihn und nur einer ist für ihn, und es giebt daher, wenn der Einsatz mit a bezeichnet wird, für ihn einen einzigen Fall für a und fünf für nichts. Nach Satz III[5]) folgt daraus für ihn die Hoffnung $\frac{1}{6}a$, und es bleibt für seinen Gegner B, welcher ihm diesen Fall anbietet, die Hoffnung $\frac{5}{6}a$. Daher kann der, welcher gleich mit dem ersten Wurfe gewinnen will, nur 1 gegen 5 einsetzen.

[**26**] Will A mit zwei Würfen einmal sechs Augen werfen, so lässt sich seine Hoffnung auf gleiche Weise berechnen. Wirft er sofort beim ersten Wurfe sechs Augen, so erhält er a; gelingt ihm dies aber nicht, so bleibt ihm noch ein Wurf übrig, welcher nach dem Vorhergehenden den Werth $\frac{1}{6}a$ für ihn hat. Dafür, dass er beim ersten Wurfe 6 wirft, hat er nur einen Fall, während für das Gegentheil fünf Fälle vorhanden sind. Daher giebt es im Anfange einen Fall, welcher ihm a verschafft, und fünf Fälle, welche ihm $\frac{1}{6}a$ liefern. Nach Satz III folgt daraus, dass seine Hoffnung den Werth $\frac{11}{36}a$ hat. Für seinen Mitspieler B bleibt mithin $\frac{25}{36}a$ übrig. Es verhalten sich folglich die Hoffnungen beider Spieler auf den zu erwartenden Gewinn wie 11 zu 36, welches Verhältniss kleiner als 1 zu 2 ist.

Auf gleiche Weise kann man nun die Hoffnung von A berechnen, wenn er mit drei Würfen einmal sechs Augen werfen will; sie beträgt $\frac{91}{216}a$. Er kann also 91 gegen 125, d. h. weniger als 3 gegen 4 einsetzen.

Die Hoffnung des A, wenn er mit vier Würfen dasselbe erreichen will[(H)], ist $\frac{671}{1296}a$, sodass er 671 gegen 625, d. h. mehr als 1 gegen 1 einsetzen kann.

Wenn A mit fünf Würfen dasselbe erreichen will, so hat er die Hoffnung $\frac{4651}{7776}a$ und kann 4651 gegen 3125, d. h. etwas weniger als 3 gegen 2 einsetzen.

Versucht A mit sechs Würfen eine Sechs zu werfen, so hat er die Hoffnung $\frac{31031}{46656}a$ und kann 31031 gegen 15625, d. h. etwas weniger als 2 gegen 1 einsetzen.

Auf diese Art kann man allmählich die Hoffnung bei beliebig vielen Würfen finden. Wir wollen uns aber kürzer fassen, wie dies bei der folgenden Aufgabe XI gezeigt wird, da die Rechnung sonst viel zu weitschweifig werden würde.

»**Anmerkungen.** (H) [Die Hoffnung des A, wenn er mit vier Würfen u. s. w.] Es kann leicht scheinen, als ob an der Richtigkeit einer solchen Rechnung des Verfassers (*Huygens*) durch eine Ueberlegung folgender Art Zweifel erzeugt würden: Wenn Jemand mit vier Würfen eine Sechs werfen will, wobei er ungefähr die gleiche Aussicht auf Gewinn und Verlust hat, so wird es, wenn das Glück gleichmässig vertheilt ist, manchmal geschehen, dass er eben so oft gewinnt, als verliert und dass also eben so oft unter vier Würfen eine Sechs ist, als unter anderen vier Würfen keine Sechs. Es wird folglich unter je acht Würfen eine Sechs sich vorfinden und also z. B. unter 600 Würfen 75 Sechsen. Es mögen nun sechs Spieler unter der gleichen Bedingung spielen und zwar soll der erste gewinnen, wenn er ein Auge wirft, der zweite, wenn er zwei Augen wirft, der dritte, wenn er drei Augen wirft u. s. w. [**27**] Alle spielen dann mit gleicher Erwartung; sie mögen aber auch mit gleichem Glücke spielen. Dann werden unter 600 Würfen 100 Sechsen fallen. Unter sonst gleichen Umständen finden sich also das eine Mal 100 Sechsen unter 600 Würfen, das andere Mal aber weniger, nämlich 75, was absurd ist. Um den Fehler aufzudecken, nehme ich zwar an, dass bei 600 Würfen 100 Sechsen fallen müssen, wenn mit gleichmässigem Glücke gespielt wird, aber ich behaupte nicht,

dass Jemand, welcher mit vier Würfen einmal sechs Augen werfen will, deshalb auch vier Würfe zum Gewinnen nöthig hat; es kann schon der erste oder zweite oder dritte Wurf eine Sechs liefern, in welchen Fällen dann die übrigen Würfe der nächsten Serie von vier Würfen zugezählt werden. Daher können schon weniger als acht Würfe ausreichen, um einmal zu gewinnen und einmal zu verlieren. Wie dies nun hierher gehört, lässt sich folgendermaassen zeigen. Ich nehme an, dass der erste Wurf jeder Serie von vier Würfen, welche mich gewinnen lässt, schon eine Sechs bringt; dann sind, damit ich hundertmal gewinne, nur 100 Würfe nöthig, und die übrigen 500 Würfe, dividirt durch 4, geben an, dass ich 125 Mal verloren habe. Bringt aber erst der letzte Wurf jeder gewinnenden Serie eine Sechs, so sind 400 Würfe nöthig, damit ich 100 Mal gewinne; die übrigen 200 Würfe zeigen dann an, dass ich 50 Mal verliere. Da ich mithin in einigen Fällen öfter verlieren als gewinnen, in anderen Fällen dagegen öfter gewinnen als verlieren würde, so schliesse ich, dass es unter dieser Bedingung richtig ist, mit gleicher Hoffnung auf Gewinn zu spielen. Wenn Jemand dagegen mit drei Würfen einmal sechs Augen werfen will, so würde er in einigen Fällen eben so oft gewinnen als verlieren (wenn nämlich erst jeder dritte Wurf eine Sechs bringt) und in anderen Fällen öfter verlieren als gewinnen (wenn nämlich einer der beiden ersten Würfe eine Sechs liefert); in keinem Falle aber würde er öfter gewinnen als verlieren. Daraus kann man mit Sicherheit schliessen, dass unter dieser Bedingung Jemand nur mit Verlust spielen kann. Ich habe diese Anmerkung nur zu dem Zwecke beigefügt, damit es klar ersichtlich wird, wie wenig man derartigen Berechnungen, welche nur die Schale berühren und nicht in den Kern der Sache selbst eindringen, trauen darf. Im gewöhnlichen Leben wird aber, selbst von sehr gescheidten Leuten, nirgends häufiger als hierin gefehlt.«

XI.

Aufgabe. Es ist zu bestimmen, mit wieviel Würfen A es wagen kann, mit zwei Würfeln zwölf Augen auf einmal zu werfen.

[**28**] Will A mit dem ersten Wurfe zweimal sechs Augen werfen, so hat er nur einen Fall, in welchem er gewinnt und den Einsatz a erhält, und 35 Fälle, in welchen er verliert

und nichts bekommt, da es im ganzen 36 Würfe giebt. Nach Satz III kommt ihm daher $\frac{1}{36}a$ zu.

Wenn er mit zwei Würfen sein Ziel erreichen will, so erhält er a, falls er mit dem ersten Wurfe gewinnt. Verliert er bei diesem aber, so bleibt ihm noch ein Wurf, was nach dem Vorigen $\frac{1}{36}a$ werth ist. Es giebt aber nur einen Fall dafür, dass er beim ersten Wurfe zweimal sechs Augen wirft, und 35 Fälle für das Gegentheil. Folglich hat er anfänglich einen Fall für a und 35 Fälle für $\frac{1}{36}a$. Nach Satz III kommt ihm daher $\frac{71}{1296}a$ und seinem Gegner $\frac{1225}{1296}a$ zu.

Daraus lässt sich weiter die Hoffnung des A berechnen, wenn er mit vier Würfen zwei Sechsen werfen will, indem wir den Fall, dass er mit drei Würfen dies erreichen will, übergehen.

Erreicht A, wenn er mit vier Würfen zweimal sechs Augen werfen will, auf das erste oder zweite Mal sein Ziel, so erhält er a; im andern Falle bleiben ihm noch zwei Fälle übrig, welche nach dem Obigen für ihn den Werth $\frac{71}{1296}a$ haben. Aus diesem Grunde folgt, dass er 71 Fälle dafür hat(J), bei dem ersten oder zweiten Wurfe zweimal sechs Augen zu werfen, und 1225 Fälle für das Gegentheil; d. h. er hat anfänglich 71 Fälle, welche ihn a gewinnen lassen, und 1225 Fälle, welche ihm $\frac{71}{1296}a$ einbringen. Nach Satz III gebührt ihm daher $\frac{178991}{1679616}a$, seinem Gegner B $\frac{1500625}{1679616}a$, und die Hoffnungen beider Spieler verhalten sich demnach wie 178991 zu 1500625.

Hieraus kann weiter in gleicher Weise die Hoffnung des A berechnet werden, wenn er mit acht Würfen einmal zwei Sechsen werfen will, und dann weiter seine Hoffnung, wenn er mit 16 Würfen dasselbe erreichen will. Mit Hülfe der ersteren oder der letzteren Hoffnung kann man dann ferner die Hoffnung von A berechnen, wenn er es mit 24 Würfen versuchen will. Da es sich bei dieser Berechnung vornehmlich darum handelt, die Anzahl der Würfe zu finden, bei welcher die Hoffnungen beider Spieler annähernd gleich sind, so mag es gestattet sein, die Zahlen für die Hoffnungen, welche sehr gross sind, fortzulassen. Ich habe auf diese Weise, wie nur erwähnt sein mag, gefunden, dass A, wenn er mit 24 Würfen zwei Sechsen zu werfen unternimmt(K), noch etwas im Nachtheil ist, und dass er erst mit 25 Würfen dies zu thun wagen kann.

[**29**] »**Anmerkungen.** (J) [Aus diesem Grunde folgt, dass er 71 Fälle u. s. w.] Wie ich zu meiner Freude hier

sehe, nimmt der Verfasser (*Huygens*) wahr, dass eine beliebige, durch einen Bruch dargestellte Hoffnung auch betrachtet werden kann als resultirend aus so vielen Fällen, den Einsatz a zu erhalten, wie der Zähler angiebt, und aus so vielen Fällen, nichts zu erhalten, wie die Differenz zwischen dem Zähler und dem Nenner beträgt — wiewohl er aber zu dieser Hoffnung wahrscheinlich auf dem anderen Wege gelangt ist. Denn obschon derjenige, welcher mit zwei Würfen zwei Sechsen werfen will, dadurch zu seiner Hoffnung von $\frac{71}{1296}a$ gelangt, dass er einen Fall für a und 35 Fälle für nichts hat, so kann man nichtsdestoweniger auch sagen, dass er 71 Fälle für a und 1225 Fälle für nichts hat. Nur in diesem Falle ergiebt sich für ihn nach Satz III Zusatz 1 der Werth seiner Hoffnung gleich $\frac{71}{1296}a$; während man grössere oder kleinere Werthe erhält, wenn man mehr Fälle für a und weniger für nichts oder umgekehrt annimmt.

(K) [Ich habe auf diese Weise, u. s. w.] Bei der vorhergehenden Aufgabe hat der Verfasser (*Huygens*) gezeigt, dass man es mit guter Aussicht auf Erfolg riskiren kann, mit einem Würfel auf vier Würfe eine Sechs zu werfen; jetzt fügt er hinzu, dass man es mit zwei Würfeln auf 24 Würfe noch nicht unternehmen könne, zwei Sechsen zu werfen. Das wird Vielen paradox scheinen, da 24 Würfe zu allen 36 Würfen zweier Würfel sich genau so verhalten, wie 4 zu allen 6 Würfen eines Würfels. An dieser Schwierigkeit ist auch ein ungenannter Gelehrter gescheitert (wie *Pascal* in einem Briefe an *Fermat* angiebt, welcher des Letzteren in Toulouse 1679 erschienenen Werken[6]) auf Seite 181 beigefügt ist); dieser Anonymus hat zwar im Allgemeinen ein gesundes Urtheil, versteht aber nichts von Mathematik. Denn wer in dieser bewandert ist, lässt sich durch einen derartigen scheinbaren Widerspruch nicht aufhalten, da er sehr wohl weiss, dass Unzähliges sich nach ausgeführter Rechnung ganz anders darstellt, als es vorher den Anschein hatte. Deshalb muss man sich sorgfältig hüten, unüberlegter Weise Analogieschlüsse zu machen, wie ich bereits öfter betont habe.

[30] Verallgemeinerte Aufgabe.

Wenn der Verfasser (*Huygens*) Buchstaben statt der Zahlen eingesetzt hätte, so hätte er diese und die vorige Aufgabe in eine einzige zusammenfassen und ihre allgemeine Lösung ebenso leicht und zwar auf folgende Weise finden können. Man setze

$a = b + c$ für die Anzahl aller Fälle, welche möglich sind bei einer beliebigen Zahl von Würfeln oder bei einem beliebigen Glücksspiele (da diese Erörterungen sich nicht unbedingt auf Würfelspiele zu beziehen brauchen, sondern für jedes Glücksspiel gelten, welches einige Male wiederholt wird und bei welchem die Zahl der Fälle immer dieselbe bleibt). b soll die Zahl der Fälle bezeichnen, in welchen die vorgeschriebene Anzahl von Augen erhalten oder das sonstige Ziel erreicht wird; c ist dann die Anzahl der Fälle, in welchen das, nach dem man strebt, nicht erreicht wird.

Will A sofort das erste Mal sein Ziel erreichen, so hat er offenbar $b = a - c$ Fälle, in welchen ihm dies gelingt und er den Einsatz, welcher gleich 1 gesetzt werden soll, gewinnt, und c Fälle, in denen er nichts erhält. Nach Satz III Zusatz 1 beträgt also seine Hoffnung $\frac{a-c}{a}$. Wenn er zweimal sein Ziel zu erreichen versucht, so hat er $a - c$ Fälle für $1 = \frac{a}{a}$ und c Fälle, durch welche er zu der früheren Hoffnung $\frac{a-c}{a}$ gelangt. Nach Satz III giebt dies für seine Hoffnung den Werth $\frac{a^2 - c^2}{a^2}$. Bedingt er sich einen dreimaligen Versuch aus, so hat er wieder $a - c$ Fälle für $1 = \frac{a^2}{a^2}$ und c Fälle für die eben gefundene Hoffnung $\frac{a^2 - c^2}{a^2}$; folglich ist seine Hoffnung gleich $\frac{a^3 - c^3}{a^3}$. Auf dieselbe Weise findet man, dass die Hoffnungen des A, wenn er dasselbe Ziel bez. durch 4, 5, ..., allgemein durch n Versuche zu erreichen unternimmt, bez. die Werthe haben $\frac{a^4 - c^4}{a^4}, \frac{a^5 - c^5}{a^5}, \ldots, \frac{a^n - c^n}{a^n}$. In dem allgemeinen Falle bleibt mithin dem Gegner B für seine Hoffnung $\frac{c^n}{a^n}$ übrig.

Ausser dieser Methode, welche mit der des Verfassers (*Huygens*) übereinstimmt, giebt es noch zwei andere, recht elegante Verfahren, die Aufgabe zu lösen.

[31] Erste Methode. Es sollen der Reihe nach die Hoffnungen des Spielers A für die einzelnen Würfe gesucht werden, d. h. es sollen seine Hoffnungen bestimmt werden, wenn er erst beim ersten, zweiten, dritten, vierten, ... Wurfe, nicht bei einem früheren gewinnen will; die Summe dieser sämmtlichen Hoffnungen ist dann die gesuchte Hoffnung. Die Hoffnung des A, wenn er mit dem ersten Wurfe sein Ziel erreichen will, ist, wie schon bemerkt, gleich $\frac{a-c}{a} = \frac{b}{a}$. Wenn er aber erst beim zweiten Wurfe gewinnen will, so darf er nicht schon beim ersten Wurfe das erreichen, wonach er strebt; sonst würde er des Gewinnes verlustig gehen. Erreicht er aber mit dem ersten Wurfe nichts, so hat er einen Wurf übrig, welcher ihm $\frac{b}{a}$ werth ist. Die Zahl der Fälle aber, durch welche er mit dem ersten Wurfe bereits das Ziel erreicht, ist nach der Festsetzung gleich b und die Anzahl derer, durch welche er es nicht erreicht, ist gleich c. Nach Satz III Zusatz 1 hat mithin seine Hoffnung den Werth $\frac{bc}{a^2}$. Will A erst beim dritten Wurfe das Ziel erreichen, so verliert er den Einsatz, wenn er es schon mit dem ersten Wurfe erlangt. Erzielt er dagegen mit dem ersten Wurfe nichts, so sind ihm noch zwei Würfe übrig, durch deren letzten er erst sein Ziel erreichen darf; nach dem eben Gesagten haben diese zwei Würfe für ihn den Werth $\frac{bc}{a^2}$. Durch b Fälle erreicht er also nichts, durch c Fälle aber $\frac{bc}{a^2}$, folglich ist der Werth seiner Hoffnung gleich $\frac{bc^2}{a^3}$. Will der Spieler A erst beim vierten Wurfe sein Ziel erreichen, so erhält er nichts, wenn er es schon mit dem ersten erreicht; im andern Falle bleiben ihm noch drei Würfe mit der eben gefundenen Hoffnung $\frac{bc^2}{a^3}$. Dadurch ergiebt sich für seine Hoffnung $\frac{bc^3}{a^4}$. Auf gleiche Weise lässt sich zeigen, dass die Hoffnungen des A, wenn er bez. erst beim fünften, sechsten, ..., allgemein beim n^{ten} Wurfe gewinnen will, bez. gleich sind $\frac{bc^4}{a^5}, \frac{bc^5}{a^6}, \ldots, \frac{bc^{n-1}}{a^n}$.

Addirt man nun die so gefundenen einzelnen Hoffnungen, so erhält man für die Hoffnung des A, wenn er mit den ersten n Würfen das Ziel erreichen will, die geometrische Reihe: [32]

$$\frac{b}{a}+\frac{bc}{a^2}+\frac{bc^2}{a^3}+\frac{bc^3}{a^4}+\cdots+\frac{bc^{n-1}}{a^n}=\frac{b}{a^n}\frac{a^n-c^n}{a-c}=\frac{a^n-c^n}{a^n},$$

wie oben gefunden war.

Zweite Methode. Wenn A mit n Würfen eines Würfels eine bestimmte Anzahl von Augen werfen will, so unternimmt er, wie bei der folgenden Aufgabe gezeigt werden wird, genau dasselbe, als wenn er dieselbe Zahl durch einen einzigen Wurf mit n Würfeln wenigstens einmal werfen will. Man nehme daher n Würfel, jeden mit a Seitenflächen, von denen c Flächen nicht jene bestimmte Zahl von Augen tragen; dann ist (wie oben bei der Aufgabe IX von *Huygens* gezeigt wurde) die Anzahl aller Fälle, welche bei den n Würfeln möglich sind, gleich a^n, und in gleicher Weise ergiebt sich die Anzahl aller Fälle, in welchen die gewünschte Anzahl von Augen auf keinem Würfel zu sehen ist, gleich c^n. In den übrigen $a^n - c^n$ Fällen muss mithin diese Anzahl wenigstens auf einem der Würfel sich vorfinden. Daher sind $a^n - c^n$ Fälle für Erlangung des Einsatzes und c^n Fälle für nichts vorhanden, und daraus folgt die Hoffnung des Spielers A gleich $\frac{a^n-c^n}{a^n}$, während $\frac{c^n}{a^n}$ für die seines Gegners B übrig bleibt.

Nachdem wir die Lösung der allgemeinen Aufgabe gegeben haben, müssen wir, wenn wir mit *Huygens* jetzt weiter wissen wollen, bei welcher Anzahl von Würfen die Hoffnungen beider Spieler gleich werden, ihre oben gefundenen Hoffnungen einander gleich setzen, was $a^n - c^n = c^n$ oder $a^n = 2c^n$ giebt. Daraus folgt, dass man die Anzahl aller Fälle und die Anzahl der A ungünstigen Fälle so lange fortgesetzt zu gleichen Potenzen zu erheben hat, bis die erstere Potenz gleich der doppelten letzteren ist; dann giebt der Potenzexponent die gesuchte Anzahl von Würfen. Dieses Verfahren hat gegenüber dem *Huygens*'schen noch den Vorzug, dass es die Hoffnung des vorhergehenden Falles nicht als bekannt voraussetzt. Die von *Huygens* benutzten Vereinfachungen, nämlich die Abtrennung des Ermittelten vom Uebrigen und die sprungweise Bestimmung der Erwartungen, behalten auch hier ihre Bedeutung bei; denn [33] wenn das Quadrat einer beliebigen

Zahl gegeben ist, so kann man die vierte Potenz derselben berechnen, ohne die dritte zu kennen, und die achte, ohne die dazwischen liegenden Potenzen erst gefunden zu haben. Es scheint mir vortheilhaft zu sein, an dem von *Huygens* behandelten Beispiele, in welchem $a = 36$ und $c = 35$ ist, das ganze Verfahren zu erläutern.

$a = 36$	$c = 35$
$a^2 = 1296$	$c^2 = 1225$
$1679 \cdot 10^3 < a^4 < 1680 \cdot 10^3$	$1500 \cdot 10^3 < c^4 < 1501 \cdot 10^3$
$2819 \cdot 10^9 < a^8 < 2823 \cdot 10^9$	$2250 \cdot 10^9 < c^8 < 2254 \cdot 10^9$
$7946 \cdot 10^{21} < a^{16} < 7970 \cdot 10^{21}$	$5062 \cdot 10^{21} < c^{16} < 5081 \cdot 10^{21}$
$2239 \cdot 10^{34} < a^{24} < 2250 \cdot 10^{34}$	$1138 \cdot 10^{34} < c^{24} < 1146 \cdot 10^{34}$
$8060 \cdot 10^{35} < a^{25} < 8100 \cdot 10^{35}$	$3983 \cdot 10^{35} < c^{25} < 4011 \cdot 10^{35}$
	$2276 \cdot 10^{34} < 2c^{24} < 2292 \cdot 10^{34}$
	$7966 \cdot 10^{35} < 2c^{25} < 8022 \cdot 10^{35}$

Aus der Tafel folgt ohne Weiteres, dass $36^{24} < 2 \cdot 35^{24}$ ist, dass aber $36^{25} > 2 \cdot 35^{25}$ ist.

Ich mache jedoch darauf aufmerksam, dass die ganze Frage sich ausserordentlich leicht mit Hülfe von Logarithmen lösen lässt. Da die Logarithmen gleicher Zahlen ebenfalls einander gleich sind, so folgt aus der Gleichung $a^n = 2c^n$ sofort:

$$n \log a = \log 2 + n \log c \quad \text{oder} \quad n \log a - n \log c = \log 2\,,$$

folglich

$$n = \frac{\log 2}{\log a - \log c}\,.$$

Man hat also nur log 2 durch die Differenz der Logarithmen von a und c zu dividiren, um die gesuchte Zahl zu erhalten. Für den Fall des obigen Beispiels ist:

$$\begin{array}{rl} a = 36\,, & \log a = 1{,}5563025 \\ c = 35\,, & \log c = 1{,}5440680 \\ \hline & \log a - \log c = 0{,}0122345\,. \end{array}$$

Dividirt man mit dieser Zahl in $\log 2 = 0.3010300$, so ist der Quotient grösser als 24 und kleiner als 25, was mit *Huygens'* und meinem obigen Resultate übereinstimmt.

[34] Meine Lösung der vorliegenden Aufgabe hat mir aber zugleich einen Angriffspunkt für einige andere ähnliche Aufgaben gegeben, zu denen die folgende gehört:

Mehrere Spieler kommen überein, dass derjenige gewinnt, welcher zuerst eine bestimmte Anzahl Augen wirft. Sie spielen in bestimmter Reihenfolge und jedem sind einige Würfe, dem einen mehr, dem andern weniger, zu thun gestattet. Wie gross ist die Hoffnung jedes einzelnen Spielers? — Spielt der Spieler, dessen Hoffnung wir bestimmen wollen, an erster Stelle, so ist nach dem Vorhergehenden seine Hoffnung gleich $\frac{a^n - c^n}{a^n}$, wenn ihm n Würfe gestattet sind. Spielen aber andere vor ihm, so ist seine Hoffnung geringer, da ihm diese ja den Gewinn entreissen können. Nun sind offenbar die Hoffnungen seiner sämmtlichen Vorgänger zusammengenommen gleich der Hoffnung eines einzigen Spielers, welcher an ihre Stelle treten würde und welchem so viele Würfe zu thun gestattet wären, als allen jenen zusammen; ist die Anzahl aller dieser Würfe s, so ist die Hoffnung des fingirten Spielers gleich $\frac{a^s - c^s}{a^s}$. Nach der Anmerkung (J) hat mithin der Spieler, dessen Hoffnung wir bestimmen wollen, bei Beginn des ganzen Spieles $a^s - c^s$ Fälle, in denen einer seiner Vorgänger gewinnt und ihm den Einsatz entreisst, und c^s Fälle, in denen er Aussicht auf Gewinn hat und die Hoffnung $\frac{a^n - c^n}{a^n}$ erlangt. Folglich ist seine Hoffnung nach Satz III Zusatz 1 gleich $\frac{(a^n - c^n)\,c^s}{a^n a^s} = \frac{a^n c^s - c^{n+s}}{a^{n+s}}$.

Zu dem gleichen Resultate führt auch der folgende Weg: Da allen Mitspielern bis zu dem einschliesslich, dessen Hoffnung bestimmt werden soll, $s + n$ Würfe gestattet sind, so ist ihre gesammte Hoffnung gleich $\frac{a^{s+n} - c^{s+n}}{a^{s+n}}$. Subtrahirt man hiervon die Summe der Hoffnungen aller Vorgänger des Betreffenden, für welche $\frac{a^s - c^s}{a^s}$ gefunden worden war, so bleibt für seine eigene Hoffnung $\frac{a^{s+n} - c^{s+n}}{a^{s+n}} - \frac{a^s - c^s}{a^s} = \frac{a^n c^s - c^{n+s}}{a^{n+s}}$ übrig.

Hier ist zu beachten, dass die Rechnung sich bedeutend vereinfacht, wenn die Zahlen a und c einen gemeinsamen Theiler

haben und also nach Satz III Zusatz 2 die kleinsten Verhältnisszahlen [35] an ihre Stelle gesetzt werden können. Z. B. Vier Spieler wollen mit zwei Würfeln sieben Augen werfen; dem ersten ist ein Wurf, dem zweiten sind 2, dem dritten 3 und dem vierten 4 Würfe hintereinander zu thun gestattet. Wie gross ist die Hoffnung des vierten Spielers? Hier ist $n = 4$ und $s = 1 + 2 + 3 = 6$, folglich ist seine Hoffnung $\frac{a^4 c^6 - c^{10}}{a^{10}}$. Nun ist ferner $a = 36$, da mit zwei Würfeln im Ganzen 36 Würfe gethan werden können, und $c = 30$ ist die Anzahl aller Fälle, in welchen mit zwei Würfeln nicht sieben Augen geworfen werden; diese Zahlen können aber durch 6 und 5 ersetzt werden. Folglich ist die Hoffnung des vierten Spielers $\frac{6^4 \cdot 5^6 - 5^{10}}{6^{10}} = \frac{10\,484\,375}{60\,466\,176}$.

Offenbar muss bei dieser Aufgabe die Summe der Hoffnungen sämmtlicher Spieler, so viele es auch sein und so viele Würfe ihnen auch gestattet sein mögen, kleiner als 1 sein, da die Möglichkeit, wenn auch selten, doch denkbar ist, dass kein Spieler die vorgeschriebene Anzahl von Augen wirft. Ferner leuchtet ohne Weiteres ein, dass bei einer gleichen Anzahl von Würfen jeder folgende Spieler schlechtere Gewinnhoffnung hat, als jeder seiner Vorgänger, und zwar ist diese um so geringer, je grösser die dem einzelnen Spieler gestattete Anzahl von Würfen ist; ist diese Zahl so gross, dass die Hoffnung des ersten Spielers auf Gewinn fast zur Gewissheit wird, so verschwindet für die übrigen jede Hoffnung. Diese Erwägung führt uns nun auf eine andere Aufgabe:

Wieviel Würfe müssen dem zweiten Spieler und den übrigen erlaubt werden, damit alle dieselbe Hoffnung wie der erste haben, wenn die diesem erlaubte Anzahl von Würfen gegeben ist? Hierbei ist aber nöthig, dass die Zahl der Würfe des ersten Spielers ihm nicht eine Hoffnung giebt, welche grösser als $\frac{1}{2}$ ist bei zwei Spielern, grösser als $\frac{1}{3}$ bei drei, grösser als $\frac{1}{4}$ bei vier Spielern und so fort, da sonst die Aufgabe unmöglich wäre. Es sei nun m die Zahl der Spieltheilnehmer, x die Anzahl der Würfe, welche alle zusammen haben, y die Anzahl der Würfe aller Spieler ausschliesslich des letzten, sodass also diesem allein $x - y$ Würfe zustehen, [36] und n die Anzahl der Würfe des ersten Spielers, dessen Erwartung $\frac{a^n - c^n}{a^n}$ ist, während die Hoffnungen aller

m Spieler zusammen die Summe $\frac{a^x - c^x}{a^x}$ ergeben. Da die einzelnen Hoffnungen aber einander gleich und gleich der des ersten sein sollen, so ist ihre Summe auch gleich $m \cdot \frac{a^n - c^n}{a^n}$, und folglich ist

$$m \frac{a^n - c^n}{a^n} = \frac{a^x - c^x}{a^x},$$

$$\frac{c^x}{a^x} = \frac{m c^n - (m-1) a^n}{a^n}.$$

Durch Uebergang zu Logarithmen erhält man schliesslich:

$$x = \frac{n \log a - \log[m c^n - (m-1) a^n]}{\log a - \log c}.$$

Aus der gleichen Ueberlegung folgt für die Summe der Hoffnungen, welche die $m - 1$ ersten Spieler haben:

$$(m-1) \frac{a^n - c^n}{a^n} = \frac{a^y - c^y}{a^y},$$

und mithin

$$y = \frac{n \log a - \log[(m-1) c^n - (m-2) a^n]}{\log a - \log c}.$$

Folglich ist die Anzahl der Würfe, welche dem letzten Spieler zu gewähren sind:

$$x - y = \frac{\log[(m-1) c^n - (m-2) a^n] - \log[m c^n - (m-1) a^n]}{\log a - \log c}.$$

Zahlenbeispiel. Von drei Spielern sind dem ersten zwei Würfe gestattet, um mit zwei Würfeln sieben Augen zu werfen (oder auch um mit einem Würfel sechs Augen zu werfen, da in beiden Fällen der Quotient $\frac{a}{c}$ denselben Werth hat). Hier ist $n = 2$, $a : c = 6 : 5$. Die Hoffnung des ersten Spielers ist $\frac{6^2 - 5^2}{6^2} = \frac{11}{36}$, also kleiner als $\frac{1}{3}$. Setzt man nun in der obigen Formel zuerst $m = 2$ und dann $m = 3$, so findet man, dass dem zweiten Spieler drei und dem dritten acht Würfe

zugestanden werden müssen, wenn die Hoffnungen aller drei Spieler möglichst nahe einander gleich sein sollen.«

[37] XII.

Aufgabe. Mit wieviel Würfeln kann A es unternehmen, auf den ersten Wurf zwei Sechsen zu werfen?

Diese Frage kommt aber auf die andere hinaus[(L)], mit wievielen Würfen es A unternehmen kann, mit einem Würfel zweimal eine Sechs zu werfen. Wenn A es mit zwei Würfen unternimmt, so hat er nach dem Obigen[(M)] die Hoffnung $\frac{1}{36}a$, den Einsatz a zu gewinnen. Unternimmt er es mit drei Würfen, so hat er, falls ihm der erste Wurf misslingt, noch zwei Würfe, von welchen jeder eine Sechs ergeben muss, und welche ihm daher $\frac{1}{36}a$ werth sind. Glückt es ihm aber auf den ersten Wurf, eine Sechs zu werfen, so braucht er bei den beiden folgenden nur noch eine Sechs zu erzielen; die beiden letzten Würfe sind ihm dann $\frac{11}{36}a$ werth (nach Aufgabe X). Nun hat A einen Fall dafür, dass er beim ersten Wurfe eine Sechs wirft, und fünf Fälle für das Gegentheil; er hat also bei Beginn des Spieles einen Fall für $\frac{11}{36}a$ und fünf Fälle für $\frac{1}{36}a$. Nach Satz III folgt daher, dass A die Hoffnung $\frac{16}{216}a = \frac{2}{27}a$ hat. Fährt man in dieser Weise fort, indem man A immer einen weiteren Wurf hinzunehmen lässt, so findet man, dass A bei 10 Würfen mit einem Würfel oder einem Wurfe mit 10 Würfeln es mit Aussicht auf Gewinn unternehmen kann, zwei Sechsen werfen zu wollen.

»**Anmerkungen.** (L) [Diese Frage kommt aber auf die andere hinaus, u. s. w.] Wenn dem A ein Wurf mit 10 Würfeln gestattet ist, so liegt klar auf der Hand, dass es keinen Unterschied ausmacht, ob er diese zehn Würfel auf einmal oder einen nach dem andern auf das Spielbrett wirft. Thut er dies Letztere, so ist es offenbar gleichgültig, ob es zehn verschiedene Würfel sind, mit welchen er spielt, oder ob er einen einzigen Würfel benutzt, welchen er nach gethanem Wurfe vom Spielbrett wieder aufnimmt, um ihn von Neuem auszuspielen.

(M) [Wenn A es mit zwei Würfen unternimmt, u. s. w.] In der vorhergehenden Aufgabe ist gezeigt worden, dass die Hoffnung dessen, welcher mit zwei Würfeln auf einen Wurf zwei Sechsen werfen will, gleich $\frac{1}{36}a$ ist. Da es aber nach

) gleich ist, ob er mit zwei Würfeln einen Wurf oder mit inem Würfel zwei Würfe thut, so kommt ihm die Hoffnung 6 a auch zu, wenn er mit einem Würfel auf zwei Würfe wei Sechsen werfen will.

Verallgemeinerte Aufgabe.

[**38**] Ebenso wie die vorige Aufgabe lässt auch diese eine 'erallgemeinerung in Buchstaben zu. Die Aufgabe kommt llgemein darauf hinaus, die Hoffnung des A zu finden, wenn r mit einer gewissen Anzahl von Würfen etwas zwei-, drei-, iermal oder öfter erreichen will. Für den Fall, dass er es ur einmal erlangen will, ist seine Hoffnung schon durch die vorige Aufgabe bestimmt.

Wenn A mit zwei Würfen etwas zweimal erlangen will, so verliert er, wenn er mit dem ersten Wurfe nichts erreicht. Glückt ihm aber der erste Wurf, so muss er, um zu gewinnen, sein Ziel immer noch einmal erreichen. Haben die Buchstaben a, b, c dieselbe Bedeutung wie bei der vorigen Aufgabe, so gebührt dem A in diesem Falle $\frac{a-c}{a}$ und seinem Gegner $\frac{c}{a}$. A hat also anfänglich b Fälle, in denen er beim ersten Wurfe das Ziel erreichen kann, und c Fälle, in denen das Gegentheil eintritt. Für seinen Gegner B sind c Fälle vorhanden, um den Einsatz $1 = \frac{c+b}{a}$ zu erhalten, und b Fälle für $\frac{c}{a}$: folglich hat B die Hoffnung $\frac{c^2+2bc}{a^2}$.

Unternimmt A mit drei Würfen ein Ziel zweimal zu erreichen, so braucht er dasselbe, falls er es mit dem ersten Wurfe schon einmal erreicht, was in b Fällen geschieht, bei den beiden letzten Würfen nur noch einmal zu erlangen; sein Gegner B hat also dann die Hoffnung $\frac{c^2}{a^2}$, wie aus der Lösung des allgemeinen Falles der vorigen Aufgabe folgt. Erreicht aber A mit dem ersten Wurfe nichts, was in c Fällen eintritt, so müssen ihm, um zu gewinnen, die beiden letzten Würfe glücken; in diesem Falle aber hat B die Hoffnung $\frac{c^2+2bc}{a^2}$, wie soeben gefunden wurde. Die b Fälle für $\frac{c^2}{a^2}$ und die c Fälle für $\frac{c^2+2bc}{a^2}$ geben der Hoffnung des B den Werth $\frac{c^3+3bc^2}{a^3}$.

Will A auf vier Würfe zweimal das Ziel erreichen, so erhält sein Gegner B in den b Fällen, in welchen A der erste Wurf gelingt, die Hoffnung $\frac{c^3}{a^3}$ und in den c Fällen, [39] in welchen das Gegentheil eintritt, die Hoffnung $\frac{c^3+3bc^2}{a^3}$; folglich hat B die Hoffnung $\frac{c^4+4bc^3}{a^4}$.

Wenn A jedoch mit drei Würfen dreimal ein gestecktes Ziel erreichen will, so erhält, wenn ihm der erste Wurf misslingt, sein Gegner B den Einsatz $1 = \frac{c^2+2bc+b^2}{a^2}$. Im andern Falle hat A noch zwei Würfe übrig, von denen ihm jedoch jeder glücken muss; in diesem Falle ist die Hoffnung des Gegners B nach dem Vorstehenden gleich $\frac{c^2+2bc}{a^2}$. Da das Erstere in c Fällen, das Letztere in b Fällen eintritt, so ist die Hoffnung des B gleich $\frac{c^3+3bc^2+3b^2c}{a^3}$.

Auf ganz ähnliche Weise kann man die Hoffnungen von B berechnen, wenn sein Gegner A mit 4, 5, 6, ... Würfen ein Ziel zwei-, drei-, viermal oder öfter erreichen will. So ist die folgende Tafel entstanden, welche man beliebig weit fortsetzen kann, wenn man beachtet, dass die Zeilen der Reihe nach alle Potenzen des Binoms $\frac{c+b}{a}$, also die zweite das Quadrat, die dritte den Cubus, u. s. w. in der Weise enthalten, dass in der ersten Columne nur das erste Glied der Entwickelung steht, in der zweiten die beiden ersten Glieder, in der dritten die drei ersten Glieder u. s. w. stehen. Daraus lässt sich leicht die Hoffnung von B finden, wenn A mit n Würfen m-mal ein Ziel erreichen will[7]).

[40] *Tafel für die Hoffnungen des B.*

(Die Hoffnungen des *A* erhält man durch Subtraction der Hoffnungen des *B* von 1.) Die römischen Zahlen geben die Anzahl der Würfe an, mit denen *A* ein-, zwei-, drei-, viermal u. s. w. ein Ziel erreichen will.

	Einmal	Zweimal	Dreimal	Viermal	
I.	$\frac{c}{a}$				
II.	$\frac{c^2}{a^2}$	$\frac{c^2+2bc}{a^2}$			
III.	$\frac{c^3}{a^3}$	$\frac{c^3+3bc^2}{a^3}$	$\frac{c^3+3bc^2+3b^2c}{a^3}$		
IV.	$\frac{c^4}{a^4}$	$\frac{c^4+4bc^3}{a^4}$	$\frac{c^4+4bc^3+6b^2c^2}{a^4}$	$\frac{c^4+4bc^3+6b^2c^2+4b^3c}{a^4}$	u.s.w.
V.	$\frac{c^5}{a^5}$	$\frac{c^5+5bc^4}{a^5}$	$\frac{c^5+5bc^4+10b^2c^3}{a^5}$	$\frac{c^5+5bc^4+10b^2c^3+10b^3c^2}{a^5}$	
VI.	$\frac{c^6}{a^6}$	$\frac{c^6+6bc^5}{a^6}$	$\frac{c^6+6bc^5+15b^2c^4}{a^6}$	$\frac{c^6+6bc^5+15b^2c^4+20b^3c^3}{a^6}$	

m-mal

$$n \quad \left[c^n + \binom{n}{1} b c^{n-1} + \binom{n}{2} b^2 c^{n-2} + \cdots + \binom{n}{m-1} b^{m-1} c^{n-m+1}\right] : a^n.$$

[41] Die allgemeine Formel dieser Tafel lässt sich in geschickter Weise auch mit Hülfe der Combinationslehre ableiten. Wie wir gesehen haben, läuft es auf dasselbe hinaus, ob *A* mit n Würfen eines Würfels oder mit einem Wurfe von n Würfeln ein bestimmtes Resultat erreichen will. Von den n Würfeln, welche mit W_1, W_2, ..., W_n bezeichnet sein mögen, soll jeder a Seitenflächen haben, von denen b die Anzahl Augen aufweisen, welche *A* werfen will, und die übrigen c irgend welche andere. Wir fragen nun: in wievielen Fällen kann es sich ereignen, dass auf keinem Würfel, nur auf einem Würfel, nur auf zwei, drei, vier, ..., $m - 1$ Würfeln die gewünschte Anzahl von Augen erscheint? Denn in allen diesen Fällen verliert *A* und gewinnt *B*. In der Anmerkung zu der vorigen Aufgabe ist gezeigt worden, dass es c^n Fälle giebt, in denen auf keinem der n Würfel die gewünschte Augenanzahl erscheint. In gleicher Weise lässt sich zeigen, dass es b, b^2, b^3, ... Fälle giebt, in denen ein Würfel, z. B. W_1, zwei Würfel W_1 und

W_2, drei Würfel W_1, W_2 und W_3, ... für A günstig fallen, und c^{n-1}, c^{n-2}, c^{n-3}, ... Fälle, in denen die übrigen $n-1$, $n-2$, $n-3$, ... Würfel für A ungünstig fallen. Da nun die einzelnen Fälle sich miteinander entsprechend verbinden können, so ergeben sich bc^{n-1}, b^2c^{n-2}, b^3c^{n-3}, ... Fälle. Fällt ein Würfel für A günstig, so kann dies W_1 oder W_2 oder W_3 oder ... sein; fallen ihm zwei günstig, so können diese W_1, W_2 oder W_1, W_3 oder W_2, W_3 oder ... sein; es können W_1, W_2, W_3 oder W_1, W_2, W_4 oder ... sein, wenn drei Würfel für A günstig fallen. Dies ergiebt für die einzelnen Fälle aber nach der Combinationslehre, welche ich im zweiten Theile behandeln werde, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, $\binom{n}{3}$, ... Möglichkeiten, und folglich ergeben sich $\binom{n}{1}bc^{n-1}$, $\binom{n}{2}b^2c^{n-2}$, $\binom{n}{3}b^3c^{n-3}$, ..., $\binom{n}{m-1}b^{m-1}c^{n-m+1}$ Fälle, in welchen nur auf einem, auf zwei, drei, ..., $m-1$ Würfeln — aber gleichgültig auf welchen — die gewünschte Zahl erscheint. In allen diesen Fällen gewinnt B, und da bei den n Würfeln [42] im Ganzen a^n Fälle möglich sind, so ist seine Hoffnung gleich

$$\frac{c^n + \binom{n}{1}c^{n-1}b + \binom{n}{2}c^{n-2}b + \cdots + \binom{n}{m-1}c^{n-m+1}b^{m-1}}{a^n}$$

nach Satz III Zusatz 1.

Bei dieser Aufgabe ist es aber, genau wie bei der vorigen, von grösstem Interesse, die Anzahl der Würfe zu ermitteln, bei welcher die Hoffnungen von A und B einander gleich (und gleich der Hälfte des Einsatzes) sind. Zu dem Zwecke muss man den Ausdruck, welcher für die Hoffnung des B gefunden worden ist, gleich $\frac{1}{2}$ setzen und aus der so gewonnenen Gleichung n so genau als möglich bestimmen. Will man, wie *Huygens*, wissen, mit wieviel Würfen A es unternehmen kann, ein gegebenes Ziel zu erreichen, z. B. mit einem Würfel zwei Sechsen zu werfen, wenn für ihn und seinen Gegner gleiche Gewinnhoffnungen vorhanden sein sollen, so hat man

$$\frac{c^n + nbc^{n-1}}{a^n} = \frac{1}{2}$$

zu setzen und erhält daraus

$$a^n = (2c + 2nb)\,c^{n-1},$$

aus welcher Gleichung die Anzahl n der Würfe sich bestimmen lässt. Ich füge hier die Rechnung für das von *Huygens* gewählte Beispiel, für welches die Anzahl der günstigen und ungünstigen Fälle schon früher bestimmt und $a = 6$, $b = 1$, $c = 5$ gefunden war:

$a = 6$	$c = 5$
$a^3 = 216$	$c^2 = 25$
$a^9 = 10\,077\,696$	$c^4 = 625$
$a^{10} = 60\,466\,176$	$c^8 = 390\,625$
	$c^9 = 1\,953\,125$

$$a^9 = 10077696 < 10937500 = 28 \cdot 390625 = (2c + 18b)c^8,$$
$$a^{10} = 60466176 > 58593750 = 30 \cdot 1953125 = (2c + 20b)c^9.$$

Da nun die neunte Potenz von a noch kleiner ist als der zugehörige Werth der rechten Seite, die zehnte Potenz von a aber grösser ist als der ihr entsprechende Werth der rechten Seite, so kann man schliessen, dass neun Würfe noch nicht genügen und dass A erst mit zehn Würfen eines Würfels es mit Aussicht auf Erfolg unternehmen kann, zwei Sechsen zu werfen.

[43]

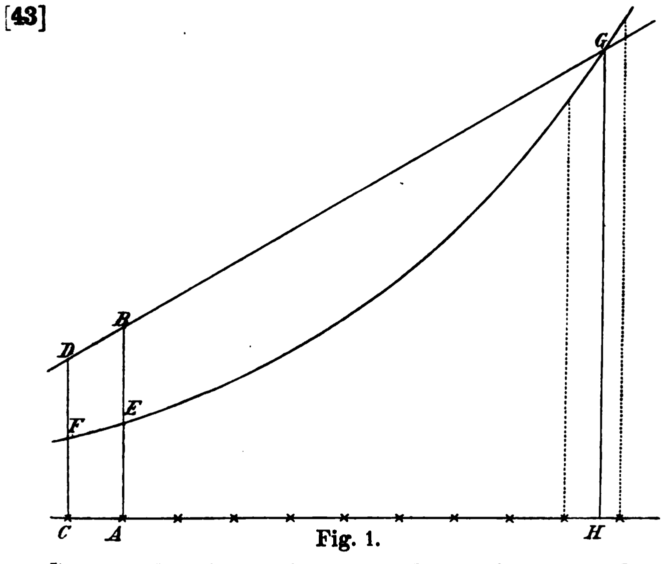


Fig. 1.

Das Resultat kann aber auch durch eine passende geometrische Construction, welche die logarithmische Linie zu

Hülfe nimmt, gefunden werden[8]). Ueber der Axe CH zeichnet man sich eine logarithmische Linie FEG und zieht dann zwei zur Axe senkrechte Linien AE und CF so, dass sie sich wie $a:c$ verhalten. Jede der beiden Senkrechten verlängert man um sich selbst bis B, bez. D und zieht dann durch diese letzteren Punkte die Verbindungsgerade BD, welche die logarithmische Linie in dem Punkte G schneidet. Wählt man noch CA als Längeneinheit, so schneidet das von G auf die Axe gefällte Loth GH auf dieser den Theil $CH = n$ ab, und giebt so die Zahl der Würfe an, mit denen man es unternehmen kann, etwas zweimal zu erreichen. In ähnlicher Weise wie hier, wo man eine gerade Linie und die logarithmische Curve sich schneiden liess, kann man in dem Falle verfahren, dass ein Ziel dreimal erreicht werden muss; statt der geraden Linie bringt man dann eine Parabel zum Schnitt mit der logarithmischen Linie. Die Zahl der Würfe, mit denen man viermal oder öfter ein gegebenes Ziel zu erreichen mit Aussicht auf Gewinn unternehmen kann, lässt sich ebenso mittelst der logarithmischen Linie und einer algebraischen Curve vom vierten oder höheren Grade bestimmen.

Uebrigens würden wir auch hier, wie es bei der vorhergehenden Aufgabe geschehen ist, diesen Gegenstand noch weiter behandeln und die Hoffnungen von mehreren Spielern ermitteln können, von denen jeder einzelne mit einer gleichen oder ungleichen Anzahl nach einander geleisteter Würfe ein gegebenes Ziel beliebig oft erreichen will, und noch andere derartige Fragen würden sich aufwerfen lassen, wenn uns nicht Kürze geboten wäre und wenn wir nicht dem Fleisse des Lesers etwas überlassen zu müssen glaubten.

Damit aber das bisher Gesagte nicht falsch verstanden wird, glauben wir noch das Folgende hervorheben zu sollen. Diese letzte und die vorhergehende Aufgabe, in welchen nach der Hoffnung eines Spielers gefragt wird, welcher mit einigen Würfen etwas einmal oder mehreremal zu erreichen sucht, [44] sind so zu verstehen, dass derselbe auch dann gewinnt, wenn er öfter, als verlangt war, das Ziel erreicht. Wäre der Sinn der Fragestellung, dass er in einem solchen Falle verliert, so würde eine wesentlich andere Aufgabe vorliegen, und es würden andere Werthe für die Hoffnungen sich ergeben. Da wir auch diese Hoffnungen später noch brauchen, so wollen wir dieselben bestimmen, bevor wir weiter gehen. Damit aber die Lösung möglichst allgemein ist, wollen wir annehmen, dass

es bei den verschiedenen Würfen (oder Einzelspielen) nicht gleich viele Fälle giebt, sondern dass sich die Zahlen derselben von Spiel zu Spiel ändern. Es seien

	beim 1.	2.	3.	4.	5.... Wurfe,
die Anzahl aller Fälle:	a	d	g	p	s ...
die Anzahl der günstigsten Fälle:	b	e	h	q	t ...
die Anzahl der ungünstigen Fälle:	c	f	i	r	u ...

Sind nun eine Anzahl von Würfen, z. B. fünf zu thun und sucht man die Hoffnung dessen, welcher mit einigen davon, z. B. mit den drei ersten das Ziel, mit den beiden übrigen aber nichts erreichen will, so muss man beachten, dass jeder von den b Fällen des ersten Wurfes mit jedem von den e Fällen des zweiten Wurfes und von den be resultirenden Fällen wiederum jeder mit den h Fällen des dritten Wurfes zusammentreffen kann, was beh Fälle ergiebt. Ebenso kann jeder der r Fälle des vierten mit jedem der u Fälle des fünften Wurfes zusammentreffen, was ru Fälle giebt. Da nun weiter jeder dieser letzteren Fälle mit jedem der früheren beh Fälle zusammentreffen kann, so ist die Zahl aller für den Spieler günstigen Fälle gleich $behru$, und da in ähnlicher Weise die Anzahl aller Fälle gleich $adgps$ gefunden wird, so ist nach Satz III Zusatz 1 die gesuchte Hoffnung gleich $\frac{behru}{adgps}$. Hieraus folgt die

Regel

zur Bestimmung der Hoffnung eines Spielers, welchem mehrere Würfe zu thun gestattet sind und welcher mit einigen genau vorgeschriebenen und nicht mit anderen Würfen etwas erzielen will:

Man bilde das Product aus den Zahlen der Fälle, in denen das Ziel bei den vorgeschriebenen Würfen, wo es erreicht werden soll, erreicht wird, und der Fälle, in welchen das Ziel nicht erreicht wird, wo es nicht erreicht werden darf, und theile es durch das Product [45] aus den Zahlen aller Fälle bei sämmtlichen Würfen; der Quotient ist der Werth der gesuchten Hoffnung.

Zusatz 1. Sind bei allen Würfen die Fälle in gleicher Anzahl vorhanden, also $d = g = p = s = a$, $e = h = q = t = b$, $f = i = r = u = c$, so geht der Werth der gefundenen

Hoffnung über $\frac{b^3c^2}{a^5}$, und allgemein in $\frac{b^m c^{n-m}}{a^n}$, wo n die Anzahl aller Würfe ist und m die Anzahl derjenigen, in welchen das Ziel erreicht werden muss.

Zusatz 2. Wenn wieder bei allen Würfen die Fälle in gleicher Anzahl vorhanden sind und auch die Zahl der Würfe, mit denen das Ziel erreicht werden muss, bestimmt ist, nicht aber die Würfe selbst bezeichnet sind, sondern beliebige sein können (z. B. wenn 5 Würfe zu machen sind und drei beliebige davon glücken müssen), so muss der eben gefundene Werth der Hoffnung offenbar so oft genommen werden, als aus n Dingen Gruppen von je m (z. B. von 5 Würfen Gruppen von je 3) gebildet werden können. Das kann aber nach der Combinationslehre, welche im folgenden Theile behandelt werden wird, $\binom{n}{m}$ oder, was dasselbe ist, $\binom{n}{n-m}$ mal geschehen, und deshalb hat die Hoffnung dessen, welcher dieses Spiel unternimmt, den Werth $\binom{n}{m}\frac{b^m c^{n-m}}{a^n} = \binom{n}{n-m}\frac{b^m c^{n-m}}{a^n}$.«

XIII.

Aufgabe. A und B spielen unter den folgenden Bedingungen miteinander: Einer von ihnen thut mit zwei Würfeln einen Wurf. Fallen sieben Augen, so gewinnt A; fallen aber zehn Augen, so gewinnt B. Bei jeder andern Augenzahl soll der Einsatz zu gleichen Theilen an beide Spieler vertheilt werden. Welche Hoffnung hat jeder der beiden Spieler?

[46] Da unter den 36 Würfen, welche mit zwei Würfeln möglich sind, 6 Würfe sich befinden, welche 7 Augen, und 3, welche 10 Augen ergeben, so bleiben 27 Würfe übrig, bei welchen das Spielresultat für A und B gleich ist, d. h. jedem der halbe Einsatz a zufällt. Tritt dies nicht ein, so hat A sechs Würfe (N), mit denen er gewinnt und a erhält, und drei Würfe, mit denen er nichts erhält. Bei Beginn des Spieles hat A also 27 Fälle für $\frac{1}{2}a$ und 9 Fälle für $\frac{2}{3}a$, woraus sich der Werth seiner Hoffnung nach Satz III gleich $\frac{13}{24}a$ ergiebt, es bleibt mithin für seinen Gegner B die Hoffnung $\frac{11}{24}a$ übrig (O).

»**Anmerkungen.** (N) [Tritt dies nicht ein, so hat A sechs Würfe, u. s. w.] *Huygens* sucht zuerst die Hoffnung

dessen, welcher 6 Fälle für Gewinn und 3 Fälle für Verlust hat; diese beträgt $\frac{2}{3}a$ und erst mit ihrer Hülfe erhält er das schliessliche Resultat. Dieses kann man aber auch direct ableiten, ohne jene Hoffnung erst zu berechnen. Denn die 27 Fälle für $\frac{1}{2}a$, 6 Fälle für a und 3 Fälle für Null ergeben nach Satz III Zusatz 3 für die Hoffnung des A ebenfalls $\frac{13}{24}a$ und die 27 Fälle für $\frac{1}{2}a$, 3 Fälle für a und 6 Fälle für Null, welche B hat, bestimmen nach demselben Zusatz seine Hoffnung gleich $\frac{11}{24}a$.

(O) [es bleibt mithin für seinen Gegner B die Hoffnung $\frac{11}{24}a$ übrig.] Nämlich der Rest des ganzen Einsatzes a. Denn da nach Beendigung des Spieles beide Spieler zusammen sicher den ganzen Einsatz erhalten haben, so muss nach unserem Grundsatze auch die Summe ihrer beider Hoffnungen gleich dem ganzen Einsatze sein, wie wir auch bei Satz IV unter (C) bemerkt haben. Anders würde die Sache liegen, wenn in einigen Fällen andere Personen als A und B den Einsatz ganz oder theilweise erhalten könnten. Z. B. wenn in dem obigen Spiele der Einsatz an die Armen vertheilt werden soll, falls weder A noch B gewinnt. Dann erhält A, wegen der 6 Fälle für a und der 30 Fälle für Null, nur $\frac{1}{6}a$ und B, wegen der 3 Fälle für a und der 33 Fälle für Null, nur $\frac{1}{12}a$, während der Rest des Einsatzes, $\frac{3}{4}a$ den Armen gehört, welche bei der Berechnung des zu erwartenden Gewinnes berücksichtigt werden müssen.«

[47] XIV.

Aufgabe. A und B würfeln einer um den andern mit zwei Würfeln unter der Bedingung, dass A gewinnt, wenn er sieben Augen wirft, B aber, wenn er sechs Augen wirft. B thut den ersten Wurf. Wie verhalten sich die Hoffnungen von A und B zu einander?

Der von A zu erwartende Gewinn werde mit x und der ganze Einsatz mit a bezeichnet; dann hat B den Gewinn $a - x$ zu erwarten. Nun muss offenbar, so oft B am Würfeln ist, die Hoffnung des A wieder gleich x sein; so oft aber die Reihe zu würfeln an A ist, muss seine Hoffnung einen höheren Werth haben, welcher mit y bezeichnet werde. Da es unter den 36 Würfen, welche mit zwei Würfeln möglich sind, fünf Würfe giebt, welche dem B sechs Augen und damit den Gewinn

bringen, und 31 Würfe, welche den A zum Spiel kommen lassen, so hat A, ehe B wirft, 5 Fälle für nichts und 31 Fälle für y, was nach Satz III für seine Hoffnung den Werth $\frac{31}{36}y$ liefert, und da diese gleich x gesetzt war, so folgt

$$\tfrac{31}{36}y = x, \quad \text{also} \quad y = \tfrac{36}{31}x.$$

Ist A am Wurfe, so hat er 6 Fälle für a (denn 6 von den 36 Würfen geben 7 Augen) und 30 Fälle dafür, dass die Reihe zu würfeln wieder an B kommt, d. h. A wieder die Hoffnung x hat. Nach Satz III ist mithin die mit y bezeichnete Hoffnung des A gleich

$$\frac{6a + 30x}{36} = y.$$

und folglich ist mit Hülfe des vorher für y gefundenen Werthes:

$$\frac{6a + 30x}{36} = \tfrac{36}{31}x$$

oder

$$x = \tfrac{31}{61}a.$$

Folglich hat B den Rest $\frac{30}{61}a$ zu erwarten, sodass sich die Hoffnung des A zu der des B wie 31 zu 30 verhält.

»**Anmerkungen.** Bei dieser Aufgabe ist *Huygens* zum ersten Male genöthigt, die Analysis anzuwenden, [**48**] während er bisher immer rein synthetisch die Lösung gefunden hatte. Bei allen früheren Aufgaben ergab sich die gesuchte Hoffnung aus anderen Hoffnungen, welche entweder bereits bekannt waren oder, wenn zwar unbekannt, aus schon gefundenen und einfacheren sich berechnen liessen, und welche nicht ihrerseits von der gesuchten Hoffnung abhängig waren; deshalb konnte man dort von den allereinfachsten Fällen ausgehen und mit ihrer Hülfe, schrittweise vorwärtsgehend, mehr und mehr verwickelte Fälle ohne analytische Hülfsmittel erledigen. Anders liegen dagegen die Verhältnisse bei der jetzigen Aufgabe. Denn man kann die Hoffnung, welche A hat, wenn die Reihe des Spielens an B kommt, nach dem früheren Verfahren *Huygens'* nicht bestimmen, wenn man nicht die Hoffnung des A, sobald er zum Würfeln kommt, kennt. Aber auch diese letztere kann man nicht berechnen, ohne nicht zuvor die erstere, gerade gesuchte Hoffnung schon zu kennen. Da also beide Hoffnungen

unbekannt sind, so können sie nach *Huygens'* Verfahren nur gefunden werden, wenn man die Analysis zu Hülfe nimmt. Es ist von Werth, dies erkannt zu haben, damit der Unterschied beider Methoden und wann bei einem Beispiele die eine, wann die andere anzuwenden ist, klar zu Tage liegt.

Ich habe betont, dass man das *Huygens*'sche Verfahren ohne Zuhülfenahme der Analysis hier nicht mehr gebrauchen kann; es giebt aber einen anderen Weg, auf welchem ich ohne jedes analytische Hülfsmittel zum Ziele kommen kann, und welcher im Folgenden mit Nutzen sich verwenden lässt. An Stelle von zwei Personen, welche abwechselnd spielen, lassen wir unendlich viele Spieler treten, welchen der Reihe nach je ein Wurf zusteht; jeder an ungerader Stelle stehende Spieler gewinnt, wenn er 6 Augen wirft, und jeder an gerader Stelle Spielende gewinnt, wenn bei seinem Wurfe 7 Augen fallen. Dann kann offenbar der zweite Spieler nicht gewinnen, wenn nicht von den beiden ersten Würfen nur der zweite erfolgreich ist; der dritte Spieler kann nicht gewinnen, wenn nicht von den drei ersten Würfen nur der dritte glückt; ebenso kann der vierte Spieler nur gewinnen, wenn allein sein Wurf erfolgreich ist, und so fort. Wenn wir nun an Stelle der Zahlen 5 und 31, d. h. der Fälle, in welchen mit zwei Würfeln sechs Augen geworfen werden können oder nicht, b und c, an Stelle von 6 und 30, also für die Zahlen der Fälle, in welchen sieben Augen fallen können oder nicht, e und f und anstatt 36, der Anzahl aller Fälle, $b + c = e + f = a$ setzen, so finden wir nach der Regel, welche am Ende der Anmerkungen zur Aufgabe XII gegeben worden ist, folgende Hoffnungen der einzelnen Spieler: [49]

Spieler:	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	...
Hoffnung:	$\frac{b}{a}$,	$\frac{ce}{a^2}$,	$\frac{bcf}{a^3}$,	$\frac{c^2ef}{a^4}$,	$\frac{bc^2f^2}{a^5}$,	$\frac{c^3ef^2}{a^6}$,	$\frac{bc^3f^3}{a^7}$,	$\frac{c^4ef^3}{a^8}$	...

Lassen wir nun an Stelle des ersten, dritten, fünften und der übrigen mit ungeraden Zahlen bezeichneten Spieler einen einzigen Spieler, B und an Stelle des zweiten, vierten, sechsten und der anderen mit geraden Zahlen bezeichneten Spieler ebenfalls einen Spieler, A treten, so kehren wir offenbar zur vorgelegten Aufgabe zurück, und es sind die Hoffnungen von A und B gleich der Summe der Hoffnungen aller jener Spieler, an deren Stelle sie getreten sind. Die Hoffnung von A ist also:

$$\frac{ce}{a^2} + \frac{c^2ef}{a^4} + \frac{c^3ef^2}{a^6} + \frac{c^4ef^3}{a^8} + \cdots$$

und die von B:

$$\frac{b}{a} + \frac{bcf}{a^3} + \frac{bc^2f^2}{a^5} + \frac{bc^3f^3}{a^7} + \cdots$$

Dies sind aber unendliche geometrische Reihen mit dem gemeinsamen Quotienten $\frac{cf}{a^2}$; die Summe der ersten ist $\frac{ce}{a^2 - cf}$ und die der zweiten $\frac{ab}{a^2 - cf}$. Folglich verhält sich die Hoffnung von A zu der von B wie ce zu ab, oder wenn man für die Buchstaben wieder die obigen Zahlenwerthe setzt, wie 31 zu 30, genau wie oben gefunden war.

Anhang.

An Stelle der Schlussvignette hat *Huygens* die folgenden fünf Aufgaben seiner Abhandlung angefügt, aber weder eine Lösung noch einen Beweis gegeben, sondern diese dem Leser zu finden überlassen. Wir sind daher gezwungen, diese theils hier zu ergänzen, theils für den zweiten Theil aufzusparen.

I.

Aufgabe. A und B spielen mit zwei Würfeln unter der Bedingung, dass A gewinnt, wenn er sechs Augen wirft, und B gewinnt, wenn er sieben Augen wirft. A beginnt das Spiel mit einem Wurfe, dann thut B zwei Würfe hintereinander, dann ebenso A zwei Würfe und so fort, bis einer von Beiden gewinnt. Wie verhält sich die Hoffnung von A zu der von B? Antwort: Wie 10355 zu 12276.

[**50**] Lösung. Die Hoffnung des A sei gleich t bei Beginn des Spieles, gleich x, wenn die Reihe zu spielen an B kommt, gleich y, wenn B einmal gespielt hat, und gleich z, wenn B seine zwei Würfe gethan hat und an A wiederum die Reihe zu spielen kommt. Alle diese Hoffnungen sind von einander verschieden und unbekannt und jede vorhergehende Hoffnung hängt von der folgenden ab und auch umgekehrt, wie sich

aus dem eingeschlagenen Verfahren ergeben wird; die Aufgabe kann also nach der *Huygens*'schen Methode nur gelöst werden, wie bei der letzten Aufgabe bemerkt ist, wenn man die Analysis zu Hülfe nimmt. Unter den mit zwei Würfeln möglichen 36 Würfen giebt es 5, welche sechs Augen ergeben und also A gewinnen lassen, und 31, welche B an das Spiel kommen lassen; bei Beginn des Spieles hat A also 5 Fälle für den Einsatz a und 31 Fälle für x. Folglich ist seine Hoffnung bei Beginn des Spieles gleich $\frac{5a+31x}{36}$, und da diese mit t bezeichnet war, so ist

$$t = \frac{5a+31x}{36}.$$

Kommt die Reihe des Spielens an B, so hat A jetzt 6 Fälle für nichts, da es 6 Würfe für 7 Augen giebt, welche seinem Gegner günstig sind, und 30 Fälle für y; folglich ist seine Hoffnung gleich $\frac{5}{6}y$, und da diese mit x bezeichnet wurde, so folgt

$$x = \tfrac{5}{6}y.$$

Hat B seinen ersten Wurf erfolglos gethan, so hat A aus dem gleichen Grunde wieder 6 Fälle für nichts und 30 Fälle für die folgende Hoffnung z; mithin ist seine Hoffnung in dem Augenblicke:

$$y = \tfrac{5}{6}z.$$

Jetzt ist die Reihe zu spielen wieder an A und zwar hat er die Hoffnung z; da er nun 5 Fälle für a hat, nämlich wenn er 6 Augen wirft, und 31 Fälle für Erwerbung seiner früheren Hoffnung t, wenn er dies nicht thut (denn dann ist der Stand für beide Spieler wieder derselbe, wie bei Beginn des Spieles: A hat noch einen Wurf, nach welchem B mit zwei Würfen kommt, worauf wieder A mit zwei Würfen folgt, und so fort), so hat andrerseits die Hoffnung des A den Werth $\frac{5a+31t}{36}$, woraus

$$z = \frac{5a+31t}{36}$$

folgt. Nachdem auf diese Weise so viele Gleichungen sich ergeben haben, als unbekannte Hoffnungen vorhanden sind, kann

man diese jetzt aus ihnen berechnen. [**51**] Man erhält so schliesslich

$$t = \frac{10355}{22631} a,$$

und es bleibt mithin für B die Hoffnung $\frac{12276}{22631} a$ übrig, sodass sich beide Hoffnungen wie 10355 zu 12276 verhalten, wie *Huygens* behauptet hatte.

Kürzer wird die Lösung, wenn man nur die drei Unbekannten t, x, z einführt und die Hoffnung y, welche A hat, nachdem B einen Wurf gethan hat, fortlässt. Aus dem Schlusse der Anmerkungen zu der Aufgabe XI entnimmt man, dass die Hoffnung dessen, welcher mit zwei Würfen einmal sieben Augen werfen will, gleich $\frac{11}{36}$ des Einsatzes ist. Man darf also nach dem dort unter dem Buchstaben (J) Bemerkten schliessen, dass es 11 Fälle giebt, in welchen B, wenn die Reihe zu spielen wieder an ihn gekommen ist, mit einem seiner beiden Würfe sieben Augen wirft und gewinnt, also A nichts erhält, und 25 Fälle, in welchen er mit keinem seiner Würfe diese Augenzahl erreicht, mithin die Reihe zu spielen wieder an A kommt und diesem die Hoffnung z giebt. Daraus ergiebt sich für die mit x bezeichnete Hoffnung des A der Werth $\frac{25}{36} z$, also $x = \frac{25}{36} z$. Verfährt man weiter, wie oben, so erhält man die dort gefundenen Werthe.

Jetzt übersieht man nun deutlich die *Huygens*'sche Methode; es empfiehlt sich ihre Anwendung in allen ähnlichen Glücks- und Würfelspielen, in welchen von mehreren aufeinander folgenden Hoffnungen jede von der nächsten abhängt, wenn nur nach einer bestimmten Anzahl von Würfen der Anfangszustand sich wieder einstellt und die gleichen unbekannten Hoffnungen zurückkehren, welche die Spieler bei Beginn hatten. Nicht so leicht aber ist zu sehen, wie man die Aufgaben behandeln muss, in welchen sich bei Fortsetzung des Spieles die Hoffnungen nicht zum Ringe schliessen, sondern endlos immer neue, von den früheren verschiedene und wie jene unbekannte sich ergeben. Derartige Aufgaben werden von *Huygens* in dieser Abhandlung nicht untersucht. Einige solche Aufgaben habe ich [**52**] in den »Ephemerides Eruditorum Gall., 1685, art. 25 gestellt in der Hoffnung, dass sich der Eine oder der Andere an ihre Lösung machen würde, nachdem aber während fünf Jahre Niemand ihre Lösung gegeben hatte, habe ich sie selbst in den »Acta Eruditorum Lips.« Mai 1690 mitgetheilt, und bald darauf im Juli desselben Jahres gab *Leibniz* in

etwas schwer verständlicher Form ebendort die Grundlage der Lösung, welche ich jetzt deutlicher auseinander setzen will [9]. Vorher aber werde ich zeigen, in welcher Weise durch dieses grundlegende Verfahren das vorliegende *Huygens*'sche Problem sich lösen lässt. Denn dieses Verfahren unterscheidet sich nicht von dem, welches ich zur Lösung der vorigen Aufgabe in den Anmerkungen angewandt habe, und es lässt sich mit derselben Leichtigkeit auf Fragen anwenden, bei welchen die nämlichen Hoffnungen im Kreise immer wiederkehren, wie auch auf solche, bei welchen ein derartiger Kreislauf nicht besteht; der einzige Unterschied zwischen beiden Fällen ist der, dass das Verfahren bei den ersteren auf eine oder mehrere unendliche Reihen führt, deren Summe in geschlossener Form dargestellt werden kann, bei den letzteren dagegen auf andere unendliche Reihen, welche nicht summirbar sind.

Wir denken uns, dass unendlich viele Spieler am Spiele theilnehmen, welche nacheinander je einen Wurf thun sollen, und von welchen der erste, vierte und fünfte, achte und neunte Spieler und so fort, wenn man je zwei aufeinanderfolgende Spieler auslässt, die beiden nächsten benachbarten mit dem Wurfe von 6 Augen gewinnen, die übrigen Spieler, nämlich der zweite und dritte, sechste und siebente, u. s. w., aber mit einem Wurfe von 7 Augen gewinnen. Nach der Regel, welche der Aufgabe XII angefügt ist, ergeben sich, wenn die Buchstaben a, b, c, e, f dieselbe Bedeutung haben, wie in den Anmerkungen zu dieser Aufgabe, für die Hoffnungen der einzelnen Spieler die folgenden Werthe:

Spieler:	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
	A.	*B.*	*B.*	*A.*	*A.*	*B.*	*B.*
Hoffnungen:	$\frac{b}{a}$,	$\frac{ce}{a^2}$,	$\frac{cef}{a^3}$,	$\frac{bcf^2}{a^4}$,	$\frac{bc^2f^2}{a^5}$,	$\frac{c^3ef^2}{a^6}$,	$\frac{c^3ef^3}{a^7}$,

Spieler:	8.	9.	10.	11.	12.	...
	A.	*A.*	*B.*	*B.*	*A.*	...
Hoffnungen:	$\frac{bc^3f^4}{a^8}$,	$\frac{bc^4f^4}{a^9}$,	$\frac{c^5ef^4}{a^{10}}$,	$\frac{c^5ef^5}{a^{11}}$,	$\frac{bc^5f^6}{a^{12}}$,	...

Ersetzen wir nun wieder alle Spieler, welche mit 6 Augen gewinnen, durch einen Spieler *A*, und alle, welche mit 7 Augen gewinnen, durch einen anderen Spieler *B*, wie es in der vorstehenden Tafel angedeutet ist, so entsteht der Fall unserer

gegenwärtigen Aufgabe, und wir erhalten für die Hoffnungen von A und B die Werthe:

$$\frac{b}{a} + \frac{bcf^2}{a^4} + \frac{bc^2f^2}{a^5} + \frac{bc^3f^4}{a^8} + \frac{bc^4f^4}{a^9} + \frac{bc^5f^6}{a^{12}} + \cdots,$$

$$\frac{ce}{a^2} + \frac{cef}{a^3} + \frac{c^3ef^2}{a^6} + \frac{c^3ef^3}{a^7} + \frac{c^5ef^4}{a^{10}} + \frac{c^5ef^5}{a^{11}} + \cdots.$$

Die an gerader Stelle stehenden Glieder [**53**] und die an ungerader Stelle stehenden Glieder in beiden Reihen für sich genommen bilden unendliche fallende geometrische Reihen mit dem Quotienten $\frac{c^2f^2}{a^4}$. Mithin ergiebt sich für die Summe der ersten Reihe $\frac{a^3b + bcf^2}{a^4 - c^2f^2}$ und für die der zweiten $\frac{a^2ce + acef}{a^4 - c^2f^2}$, sodass sich die Hoffnung von A zu der von B verhält wie $a^3b + bcf^2$ zu $a^2ce + acef$, was für die vorliegende Aufgabe (für welche $a = 36$, $b = 5$, $c = 31$, $e = 6$, $f = 30$ zu setzen ist) das Verhältniss 10355 zu 12276 ergiebt.

Ich lasse noch Beispiele solcher Fragestellungen folgen, in welchen die Hoffnungen nicht im Kreise wiederkehren: Zwei Spieler A und B würfeln mit zwei Würfeln unter der Bedingung, dass derjenige gewinnt, welcher zuerst sieben Augen wirft. Die Anzahl und Reihenfolge der jedem Spieler zustehenden Würfe ist eine der in der folgenden Tafel angegebenen:

Nummer der Würfe	I.		II.		III.		IV.	
	A.	*B.*	*A.*	*B.*	*A.*	*B.*	*A.*	*B.*
1.	1	1	1	1	1	1	1	2
2.	2	1	1	2	2	2	3	4
3.	3	1	1	3	3	3	5	6
4.	4	1	1	4	4	4	7	8
.	.	.	.	.	.	.	.	.

Wie gross sind die Hoffnungen beider Spieler?

Hier ist die analytische Methode *Huygens'* nicht brauchbar, wohl aber liefert die meinige mit derselben Leichtigkeit, wie vorhin, das Resultat. An Stelle der beiden Spieler A und B nehme ich wieder unendlich viele Spieler an, deren

jeder nur einen Wurf thun darf, und frage nach den Hoffnungen der einzelnen Spieler. Nach dem Zusatze 1 der der Aufgabe XII angefügten Regel findet sich, da die Anzahl der Fälle a, b, c bei allen Würfen dieselbe ist, die Hoffnung eines Spielers allgemein gleich $\frac{b^m c^{n-m}}{a^n}$, wo hier m, die Anzahl der Würfe, mit denen 7 Augen (einer der b Fälle) geworfen werden können, beständig gleich 1 ist, und n, die Anzahl aller Würfe von Anfang an, nacheinander die Werthe 1, 2, 3, 4, . . . annimmt. Setze ich diese Zahlen ein, so ergiebt sich die folgende Tafel für die Spielordnung IV:

Spieler:	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
IV.	A.	B.	B.	A.	A.	A.	B.	B.	B.
Hoffnungen:	$\frac{b}{a}$,	$\frac{bc}{a^2}$,	$\frac{bc^2}{a^3}$,	$\frac{bc^3}{a^4}$,	$\frac{bc^4}{a^5}$,	$\frac{bc^5}{a^6}$,	$\frac{bc^6}{a^7}$,	$\frac{bc^7}{a^8}$,	$\frac{bc^8}{a^9}$,

Spieler:	10.	11.	12.	13.	14.	15.	. . . .
IV.	B.	A.	A.	A.	A.	A.	. . . .
Hoffnungen:	$\frac{bc^9}{a^{10}}$,	$\frac{bc^{10}}{a^{11}}$,	$\frac{bc^{11}}{a^{12}}$,	$\frac{bc^{12}}{a^{13}}$,	$\frac{bc^{13}}{a^{14}}$,	$\frac{bc^{14}}{a^{15}}$,	. . . .

Dann lasse ich an Stelle der einzelnen Spieler wieder A und B treten, indem ich jedem von ihnen die Plätze zuweise, die ihnen nach den Bedingungen des betreffenden Spieles zukommen, und [54] summire alle diesen Stellen entsprechenden Hoffnungen, um die Gesammthoffnungen von A und B zu erhalten. Da z. B. nach den Bedingungen IV dem A der 1te, 4te bis 6te, 11te bis 15te, . . . Wurf zukommt, so giebt mir die Summe der Hoffnungen des 1ten, 4ten bis 6ten, 11ten bis 15ten . . . Spielers die Hoffnung des A und die Summe der übrigen Hoffnungen die des B. Folglich sind die Hoffnungen von A und B:

$$\frac{b}{a}+\frac{bc^3}{a^4}+\frac{bc^4}{a^5}+\frac{bc^5}{a^6}+\frac{bc^{10}}{a^{11}}+\frac{bc^{11}}{a^{12}}+\frac{bc^{12}}{a^{13}}+\frac{bc^{13}}{a^{14}}+\frac{bc^{14}}{a^{15}}+\cdots$$

und

$$\frac{bc}{a^2}+\frac{bc^2}{a^3}+\frac{bc^6}{a^7}+\frac{bc^7}{a^8}+\frac{bc^8}{a^9}+\frac{bc^9}{a^{10}}+\frac{bc^{15}}{a^{16}}+\frac{bc^{16}}{a^{17}}+\frac{bc^{17}}{a^{18}}+\cdots$$

oder $b = a - c$ eingesetzt:

$$1 - \frac{c}{a} + \frac{c^3}{a^3} - \frac{c^6}{a^6} + \frac{c^{10}}{a^{10}} - \frac{c^{15}}{a^{15}} + \cdots$$

und

$$\frac{c}{a} - \frac{c^3}{a^3} + \frac{c^6}{a^6} - \frac{c^{10}}{a^{10}} + \frac{c^{15}}{a^{15}} - \cdots,$$

welche beiden Hoffnungen sich zu 1 ergänzen.

Dieses Resultat lässt sich auch noch anders ermitteln. Ich setze an Stelle von A und B wieder unendlich viele Spieler, theile aber jedem einzelnen so viele Würfe hintereinander zu, als nach dem Wortlaute der Aufgabe A und B zufallen, wenn die Reihe zu spielen an einen von ihnen kommt. Bei den Spielbedingungen IV z. B. nehme ich an, dass A einmal, B zweimal, ein Dritter, C dreimal, ein Vierter, D viermal, ... spielt, und bestimme die Hoffnungen jedes einzelnen Spielers, wobei ich die Zahl der Würfe, welche von ihm selbst zu thun sind, und die Zahl aller vor ihm geschehenen Würfe beachte. Diese Hoffnung hat aber, wie in den Anmerkungen zur Aufgabe XI (wo die erstere Zahl mit n, die letztere mit s bezeichnet wurde) allgemein den Werth $\frac{a^n c^s - c^{n+s}}{a^{n+s}} = \frac{c^s}{a^s} - \frac{c^{n+s}}{a^{n+s}}$. Ich erhalte mithin hier für die einzelnen Spieler die folgenden Hoffnungen:

Spieler:	$A.$	$B.$	$C.$	$D.$	$E.$
Hoffnungen:	$1 - \frac{c}{a}$,	$\frac{c}{a} - \frac{c^3}{a^3}$,	$\frac{c^3}{a^3} - \frac{c^6}{a^6}$,	$\frac{c^6}{a^6} - \frac{c^{10}}{a^{10}}$,	$\frac{c^{10}}{a^{10}} - \frac{c^{15}}{a^{15}}$,

Spieler:	$F.$	$G.$	...
Hoffnungen:	$\frac{c^{15}}{a^{15}} - \frac{c^{21}}{a^{21}}$,	$\frac{c^{21}}{a^{21}} - \frac{c^{28}}{a^{28}}$,	....

[55] Um die gesuchten Hoffnungen zu erhalten, brauche ich nun nur noch die Hoffnungen der an ungerader Stelle stehenden Spieler A, C, E, G, ... und ebenso die Hoffnungen der an gerader Stelle stehenden Spieler B, D, F, ... zu einander zu addiren, was die früher gefundenen Summen wieder ergiebt. Es würde auch das Verfahren das gleiche sein, wenn drei, vier oder mehr Spieler in der gestellten Aufgabe angenommen würden.

Auf jede dieser beiden Arten lassen sich die andern Beispiele lösen, und man erhält für die Hoffnungen der Spiel

die folgenden Reihen, welche den vier verschiedenen Spielplänen I bis IV entsprechen (wobei zur Abkürzung $\frac{a}{c} = m$ gesetzt ist):

$$\text{I.}\begin{cases} A: & 1-m+m^2-m^4+m^5-m^8+m^9-m^{13}+m^{14}-m^{19}+\cdots, \\ B: & m-m^2+m^4-m^5+m^8-m^9+m^{13}-m^{14}+m^{19}-\cdots; \end{cases}$$

$$\text{II.}\begin{cases} A: & 1-m+m^2-m^3+m^5-m^6+m^9-m^{10}+m^{14}-m^{15}+\cdots, \\ B: & m-m^2+m^3-m^5+m^6-m^9+m^{10}-m^{14}+m^{15}-\cdots; \end{cases}$$

$$\text{III.}\begin{cases} A: & 1-m+m^2-m^4+m^6-m^9+m^{12}-m^{16}+m^{20}-m^{25}+\cdots, \\ B: & m-m^2+m^4-m^6+m^9-m^{12}+m^{16}-m^{20}+m^{25}-\cdots; \end{cases}$$

$$\text{IV.}\begin{cases} A: & 1-m+m^3-m^6+m^{10}-m^{15}+m^{21}-m^{28}+m^{36}-m^{45}+\cdots, \\ B: & m-m^3+m^6-m^{10}+m^{15}-m^{21}+m^{28}-m^{36}+m^{45}-\cdots. \end{cases}$$

Diese einzelnen Hoffnungen sind also dargestellt durch unendliche Reihen mit alternirenden Zeichen, deren Glieder aus der vollständigen Reihe $1, m, m^2, m^3, m^4, m^5, \ldots$ in ungleichen Intervallen herausgenommen sind, und gerade dieser Umstand verhindert ihre Summirung. Leicht aber lassen sich Näherungswerthe in beliebig weit getriebener Genauigkeit berechnen. Setzt man den Zahlenwerthen der Fragestellung gemäss $a = 36$ und $c = 30$, also $m = \frac{c}{a} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6} = 0 \cdot 8333 \ldots$, so erhält man für die den vier Spielbedingungen entsprechenden Hoffnungen des A die Werthe [10]:

I: 0,71931, II: 0,40058, III: 0,59679, IV: 0,52392,

wobei die Zahlen bis auf eine Einheit der letzten Ziffer genau sind. Folglich verhält sich in den vier Fällen die Hoffnung des A zu der des B wie

I: 71931 : 28069, II: 40058 : 59942, III: 59679 : 40321,
IV: 52392 : 47608.

Wer sich die Exponenten der Potenzen von m, [**56**] welche die Glieder dieser Reihen bilden, genauer ansieht, erkennt, dass ihre Differenzen stets mit den Zahlen der Würfe übereinstimmen, welche den beiden Spielern A und B nach den Bestimmungen des Spielplanes abwechselnd zustehen. Z. B. sind die Exponenten in der ersten Reihe $1 - m + m^2 - m^4 + m^5 - m^8 + m^9 - \ldots$

gleich 0, 1, 2, 4, 5, 8, 9, ... und deren Differenzen 1, 1, 2, 1, 3, 1, ... stimmen genau mit den Anzahlen der Würfe überein, welche *A* und *B* nach Spielplan I der Reihe nach zugetheilt sind. Dieses Gesetz gilt, was hervorgehoben zu werden verdient, ganz allgemein, selbst auch bei solchen Spielen, bei welchen den beiden Spielern eine ganz beliebige Zahl von Würfen jedesmal zugewiesen ist und zwischen den einzelnen Zahlen gar keine gesetzmässige Beziehung besteht. Diese Betrachtung führt mithin zur folgenden

Regel,

welche die Hoffnungen zweier Spieler augenblicklich finden lehrt, wenn ihnen beliebig viele Würfe, nach willkürlich gegebenen und in das Unendliche fortlaufenden Zahlen zu thun gestattet sind, und vorausgesetzt ist, dass $\frac{a}{c} = m$ für alle Würfe denselben Werth hat:

Man schreibe der Reihe nach zuerst die jedem der beiden Spieler zustehende Anzahl von Würfen hin, darunter die Summe dieser von Anfang an; diese letzteren liefern ebensoviele Exponenten der Potenzen von m, welche, abwechselnd durch $+$ und $-$ miteinander verbunden, die Hoffnung des ersten Spielers ergeben. Lässt man in dieser Reihe die 1 fort, welche immer das Anfangsglied bildet, und kehrt man die Zeichen der übrigen Glieder um, so erhält man die Hoffnung des zweiten Spielers.

[57] Beispiel:	*A.*	*B.*	*A.*	*B.*	*A.*	*B.*	*A.*	*B.*	*A.* ...
Zahl der Würfe:	3	1	4	1	5	9	2	6	5*)...
Summen: 0	3	4	8	9	14	23	25	31	36 ...

Hoffnung des *A*: $1-m^3+m^4-m^8+m^9-m^{14}+m^{23}-m^{25}+m^{31}-m^{36}+\cdots$

Hoffnung des *B*: $m^3-m^4+m^8-m^9+m^{14}-m^{23}+m^{25}-m^{31}+m^{36}-\cdots$

Zu beachten ist, dass diese Regel noch volle Gültigkeit behält, wenn die Anzahl aller Würfe eine begrenzte ist, über

*) Die Zahlen sollen die Ziffern der *Ludolph*'schen Zahl $\pi = 3{,}14159265359$ .... sein; zwischen diesen herrscht kein bestimmtes Gesetz.

welche hinaus das Spiel selbst dann nicht fortgesetzt wird, wenn noch keiner der Spieler gewonnen hat. Nur muss die letzte Potenz von m, deren Exponent gleich der Summe aller Würfe ist, in der Reihe, in welcher sie mit dem positiven Zeichen erscheint, fortgelassen werden, und um dieses Glied bleibt die Summe der Hoffnungen beider Spieler kleiner als 1. Hört in dem vorigen Beispiele das Spiel nach dem 36. Wurfe auf, so sind die Hoffnungen von A und B:

$$A\colon\ 1 - m^3 + m^4 - m^8 + m^9 - m^{14} + m^{23} - m^{25} + m^{31} - m^{36},$$
$$B\colon\ \quad m^3 - m^4 + m^8 - m^9 + m^{14} - m^{23} + m^{25} - m^{31}.$$

also die Summe beider: $1 - m^{36}$.

II.

Aufgabe. Drei Spieler A, B und C, welche 12 Steine haben, von denen 4 weisse und 8 schwarze sind, spielen unter der folgenden Bedingung miteinander: Wer von ihnen zuerst blindlings einen weissen Stein ergreift, hat gewonnen; zuerst zieht A, dann B, darauf C, dann wieder A, und so fort. Wie verhalten sich die Hoffnungen der drei Spieler zu einander?

Lösungen. Der Sinn dieser Aufgabe ist vieldeutig und daher sind auch verschiedene Lösungen möglich. Man kann nämlich entweder annehmen, dass der gezogene Stein wieder in die Urne zurückgelegt wird, bevor der folgende Spieler zieht, sodass die Zahl der in der Urne liegenden Steine immer dieselbe ist, oder dass dies nicht geschieht und mithin die Zahl der Steine immer kleiner wird. [**58**] Ferner kann man annehmen, dass jeder einzelne Spieler 12 Steine hat oder dass sie alle drei zusammen 12 Steine haben.

1. Wenn die Steine nach den einzelnen Zügen wieder in die Urne zurückgethan werden müssen (in welchem Falle es gleichgültig ist, ob alle drei Spieler zusammen 12 Steine haben oder ob jeder so viele besitzt), so kann man die Hoffnungen der Spieler auf eine der beiden folgenden Arten finden.

a) Nach der *Huygens*'schen Methode. Die Hoffnung des A werde mit x, die des B mit y und die des C mit z bezeichnet. Beginnt A zu spielen, so hat er (wegen der 4 weissen Steine) 4 Fälle, den Einsatz 1 zu erhalten und (wegen der 8 schwarzen Steine) 8 Fälle, in welchen er seinen Vorrang verliert und auf den dritten Platz kommt, also die

Hoffnung z erhält; dies giebt für seine Hoffnung x den Werth $\frac{4+8z}{12} = \frac{1+2z}{3}$, also

$$x = \frac{1+2z}{3}.$$

Aus dem gleichen Grunde hat B, wenn A das Spiel beginnt, 4 Fälle für nichts und 8 Fälle, an die erste Stelle zu kommen und damit die Hoffnung x zu erhalten. Folglich ist seine Hoffnung $\frac{8}{12}x = \frac{2}{3}x$, und mithin

$$y = \tfrac{2}{3}x.$$

Der dritte Spieler C hat 4 Fälle für nichts und 8 Fälle, in welchen er an die zweite Stelle kommt und die Hoffnung y erhält; es ergiebt sich daher für seine Hoffnung z der Werth:

$$z = \tfrac{2}{3}y.$$

Hieraus findet man leicht[11]):

$$x = \tfrac{9}{19},\ y = \tfrac{6}{19},\ z = \tfrac{4}{19},$$

und daher verhalten sich die Hoffnungen

$$x:y:z = 9:6:4.$$

b) Nach meiner Methode. Bezeichnet man allgemein mit a die Anzahl aller Steine, mit b die der weissen und mit c die der schwarzen, und nimmt man wieder unendlich viele Spieler an, welche unter der gegebenen Bedingung mit einander spielen, und von welchen einer nach dem andern einen Stein zieht und ihn dann in die Urne zurücklegt, so ergeben sich nach Zusatz 1 zu der am Ende von Aufgabe XII gegebenen Regel (da bei allen Zügen die Zahl der weissen und schwarzen Steine dieselbe ist) die folgenden Hoffnungen: [59]

Spieler:	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
	$A.$	$B.$	$C.$	$A.$	$B.$	$C.$	$A.$	$B.$	$C.$
Hoffnungen:	$\frac{b}{a}$,	$\frac{bc}{a^2}$,	$\frac{bc^2}{a^3}$,	$\frac{bc^3}{a^4}$,	$\frac{bc^4}{a^5}$,	$\frac{bc^5}{a^6}$,	$\frac{bc^6}{a^7}$,	$\frac{bc^7}{a^8}$,	$\frac{bc^8}{a^9}$,

Spieler:	10.	11.	12.	13.	14.	15. . . .
	$A.$	$B.$	$C.$	$A.$	$B.$	$C.$ . . .
Hoffnungen:	$\frac{bc^9}{a^{10}}$,	$\frac{bc^{10}}{a^{11}}$,	$\frac{bc^{11}}{a^{12}}$,	$\frac{bc^{12}}{a^{13}}$,	$\frac{bc^{13}}{a^{14}}$,	$\frac{bc^{14}}{a^{15}}$ . . .

Nun kommt der 1te, 4te, 7te ... Zug dem A, der 2te, 5te, 8te ... dem B, der 3te, 6te, 9te dem C zu; summirt man also die Hoffnungen der an diesen Stellen befindlichen Spieler, so erhält man für die Hoffnungen von A, B und C die folgenden geometrischen Reihen:

$$A: \frac{b}{a} + \frac{bc^3}{a^4} + \frac{bc^6}{a^7} + \frac{bc^9}{a^{10}} + \frac{bc^{12}}{a^{13}} + \cdots = \frac{a^2 b}{a^3 - c^3},$$

$$B: \frac{bc}{a^2} + \frac{bc^4}{a^5} + \frac{bc^7}{a^8} + \frac{bc^{10}}{a^{11}} + \frac{bc^{13}}{a^{14}} + \cdots = \frac{abc}{a^3 - c^3},$$

$$C: \frac{bc^2}{a^3} + \frac{bc^5}{a^6} + \frac{bc^8}{a^9} + \frac{bc^{11}}{a^{12}} + \frac{bc^{14}}{a^{15}} + \cdots = \frac{bc^2}{a^3 - c^3};$$

folglich verhalten sich die Hoffnungen zu einander wie

$$a^2 : ac : c^2,$$

also in unserem Falle (wo $a : c = 12 : 8 = 3 : 2$ ist) wie $9 : 6 : 4$, wie oben gefunden wurde. In gleicher Weise lässt sich die Aufgabe lösen, wenn sich vier oder mehr Spieler betheiligen; bei 4 Spielern verhalten sich die Hoffnungen wie

$$a^3 : a^2 c : ac^2 : c^3,$$

bei n Spielern wie

$$a^{n-1} : a^{n-2} c : a^{n-3} c^2 : \cdots : ac^{n-2} : c^{n-1}.$$

2. Der Sinn der Aufgabe soll der sein, dass die drei Spieler zusammen 12 Steine haben und dass kein gezogener Stein in die Urne zurückgelegt wird.

a) Nach der *Huygens*'schen Methode. Dann ist zu beachten, dass durch fortwährendes Ziehen von schwarzen Steinen zwar der erste Spieler an die Stelle des dritten, der dritte an Stelle des zweiten, der zweite an Stelle des ersten kommt, dass aber doch nicht die Hoffnungen, welche sie am Anfange des Spieles hatten, auf gleiche Weise sich vertauschen, wie es bei der vorigen Annahme geschah, sondern dass die Spieler immer neue, von den früheren verschiedene Hoffnungen erhalten, da sich die Anzahl der Steine fortwährend ändert. Diese Hoffnungen sind um so einfacher zu bestimmen, je mehr schwarze Steine gezogen sind, und kommen schliesslich auf bereits bekannte hinaus. Deshalb gelangen wir, wenn wir

nach der *Huygens*'schen Methode mit den allereinfachsten Hoffnungen beginnen und allmählich zu allen dazwischen liegenden vorwärtsschreiten, rein synthetisch schliesslich zu der bei dieser Fragestellung gesuchten Hoffnung.

Zu diesem Zwecke nehmen wir an, dass schon 7 schwarze Steine gezogen sind. Der nächste Zug ist von B zu thun und [60] A hat dann nichts mehr zu erwarten, da wegen des einen übrig gebliebenen schwarzen Steines entweder B oder C nothwendig gewinnen muss. Wegen der 4 weissen Steine und des einen schwarzen Steines hat B mithin 4 Fälle für Gewinn und einen Fall für Verlust, in welchem Falle C unbedingt gewinnen muss. Aus dem gleichen Grunde aber hat C einen Fall für Gewinn und 4 Fälle für Verlust. Folglich sind die Hoffnungen von A, B und C gleich 0, $\frac{4}{5}$ und $\frac{1}{5}$.

Zweitens nehmen wir an, dass sechs schwarze Steine herausgenommen sind. Dann hat A, an welchem die Reihe zu ziehen ist, 4 Fälle für Gewinn, und die beiden andern Spieler haben ebenso viele Fälle für Verlust. Alle drei Spieler aber haben wegen der noch übrigen zwei schwarzen Steine 2 Fälle, in welchen sie die vorher gefundenen Hoffnungen zurückerlangen, da ja, wenn A einen schwarzen Stein zieht, nur noch ein schwarzer Stein übrig und die Reihe zu spielen an B gekommen ist, wie in dem bereits erledigten Falle angenommen war. Also sind hier die Hoffnungen von A, B und C gleich $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{15}$ und $\frac{1}{15}$.

Nehmen wir jetzt an, dass fünf schwarze Steine gezogen sind, so hat C, welcher jetzt am Zuge ist, 4 Fälle für Gewinn, A und B haben 4 Fälle für Verlust. Wegen der noch übrigen drei schwarzen Steine hat jeder der drei Spieler 3 Fälle für die soeben gefundene Hoffnung. Daraus ergeben sich für A, B und C die Hoffnungen $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{35}$ und $\frac{3}{5}$.

Wenn vier schwarze Steine herausgenommen, also noch gleich viele weisse wie schwarze Steine vorhanden sind, so sind ebenso viele Fälle dem B, welcher jetzt an den Zug kommt, günstig als dem A und C; alle drei haben auch gleich viele Fälle, die zuletzt gefundenen Hoffnungen zu erhalten. Daraus resultiren für A, B und C die Hoffnungen $\frac{1}{7}$, $\frac{39}{70}$ und $\frac{3}{10}$.

Auf gleiche Weise ergeben sich für die Hoffnungen, wenn drei schwarze Steine gezogen sind und also A am Zuge ist, $\frac{11}{21}$, $\frac{13}{42}$, $\frac{1}{6}$.

Sind zwei schwarze Steine herausgenommen, so ist die Reihe zu ziehen an C, und es sind die Hoffnungen gleich $\frac{11}{35}$, $\frac{13}{70}$, $\frac{1}{2}$.

Ist ein schwarzer Stein gezogen, so ist die Reihe zu ziehen an B und es ergeben sich die Hoffnungen $\frac{1}{5}$, $\frac{53}{110}$, $\frac{7}{22}$.

Wenn schliesslich noch kein Stein herausgenommen und A am Zuge ist, auf welchen Fall allein wir hinzielten und wegen dessen wir alle vorhergehenden Fälle erst erledigen mussten, so erhalten wir für die Hoffnungen von A, B, C: $\frac{7}{15}$, $\frac{53}{165}$, $\frac{7}{33}$ oder auch $\frac{77}{165}$, $\frac{53}{165}$, $\frac{35}{165}$, und folglich verhalten sie sich zu einander wie

$$77 : 53 : 35.$$

b) Nach meiner Methode. Auch in diesem Falle lässt sich meine Methode anwenden, [61] da sie nicht nur bei den Aufgaben anwendbar ist, zu deren Lösung man die Analysis sonst noch hinzunehmen muss, sondern auch bei solchen, welche sich rein synthetisch lösen lassen. Da die acht schwarzen Steine nicht zurückgelegt werden sollen, wenn sie gezogen worden sind, so nehme ich an, dass neun Spieler theilnehmen, von denen jeder einen Zug thut; dann muss einer von ihnen schliesslich einen weissen Stein ziehen und gewinnen. Damit aber ein Spieler Hoffnung hat, den Gewinn zu erhalten, müssen alle seine Vorgänger schwarze Steine gezogen haben. Ich nehme also an, dass die Zahl derselben (und mit ihr die Zahl aller Fälle) schrittweise kleiner wird und nach dem ersten Zuge nur noch 7, nach dem zweiten nur noch 6, nach dem dritten noch 5 Steine, ... übrig sind. Dann finde ich nach der Regel am Schlusse der Aufgabe XII die Hoffnungen der einzelnen Spieler, wie sie in der folgenden Tafel angegeben sind.

Spieler:	1.	2.	3.	4.	5.
	A.	B.	C.	A.	B.
Anzahl aller Steine:	12	11	10	9	8
Anzahl der weissen Steine:	4	4	4	4	4
Anzahl der schwarzen Steine:	8	7	6	5	4
Hoffnungen:	$\frac{4}{12}$,	$\frac{4\cdot 8}{11\cdot 12}$,	$\frac{4\cdot 7\cdot 8}{10\cdot 11\cdot 12}$,	$\frac{4\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}$,	$\frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}$,

Spieler:	6.	7.	8.	9.
	C.	*A.*	*B.*	*C.*
Anzahl aller Steine:	7	6	5	4
Anzahl der weissen Steine:	4	4	4	4
Anzahl der schwarzen Steine:	3	2	1	0
Hoffnungen:	$\frac{4\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12}$,	$\frac{4\cdot3\cdot4\cdots8}{6\cdot7\cdot8\cdots12}$,	$\frac{4\cdot2\cdot3\cdots8}{5\cdot6\cdot7\cdots12}$,	$\frac{4\cdot1\cdot2\cdots8}{4\cdot5\cdot6\cdots12}$.

Nun addire ich die Hoffnungen des 1ten, 4ten und 7ten Spielers, da die gleichnamigen Züge dem A zukommen, ebenso die Hoffnungen des 2ten, 5ten und 8ten Spielers, bezw. des 3ten, 6ten und 9ten Spielers, deren Züge B, bezw. C gebühren, [**62**] und erhalte dann so die Hoffnungen von A, B und C. Wie zuvor ergeben sich für das Verhältniss der drei Hoffnungen schliesslich die Zahlen

$$77 : 53 : 35.$$

3. Fasst man die Aufgabe im dritten Sinne auf, nach welchem jeder Spieler 12 Steine hat und einer nach dem andern einen Stein von den seinigen wegnimmt, denselben aber nicht wieder zu den übrigen zurücklegt, so unterscheidet sich die Aufgabe nur wenig von der eben behandelten, erfordert aber in Folge der grösseren Anzahl von Steinen viel grössere Mühe.

a) Nach der *Huygens*'schen Methode. Nehmen wir zunächst an, dass A und B keinen schwarzen Stein mehr haben, C aber, an welchem die Reihe zu ziehen ist, noch einen. Dann hat C wegen der 4 weissen Steine und des einen schwarzen 4 Fälle für Gewinn und einen Fall für Verlust. Denn wenn C seinen schwarzen Stein zieht, so gewinnt A, welcher nur noch weisse Steine besitzt, unbedingt. Aus dem gleichen Grunde aber hat A vier Fälle für Verlust und einen Fall für Gewinn. Für B bleibt keine Hoffnung übrig, da einem der beiden andern Spieler unbedingt der Gewinn zufallen muss. Folglich sind die Hoffnungen von A, B, C gleich $\frac{1}{5}$, 0, $\frac{4}{5}$.

Zweitens nehmen wir an: A hat keinen schwarzen Stein mehr übrig, B und C je noch einen. Dann hat B, an welchem die Reihe zu ziehen ist, 4 Fälle für Gewinn und jeder der beiden andern Spieler ebenso viele Fälle für Verlust. [**63**] In einem Falle aber, nämlich wenn B den schwarzen Stein zieht, erhalten A und C die Hoffnungen der vorigen Annahme. Dies giebt für A, B, C die Hoffnungen $\frac{1}{25}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{25}$.

Drittens nehmen wir an, dass jeder der drei Spieler noch einen schwarzen Stein hat. Dann hat A, welcher das Spiel wieder aufzunehmen hat, vier Fälle für Gewinn und jeder der beiden andern Spieler ebenso viele für Verlust; einen Fall aber giebt es, in welchem alle drei Spieler zu den eben gefundenen Hoffnungen gelangen. Daraus ergeben sich für ihre Hoffnungen die Werthe $\frac{101}{125}$, $\frac{4}{25}$, $\frac{4}{125}$, oder sie verhalten sich zu einander wie 101 : 20 : 4.

In gleicher Weise würde weiter zu untersuchen sein, was den Spielern A, B und C zukommt, wenn ihnen noch 1, 1, 2; 1, 2, 2; 2, 2, 2; 2, 2, 3; 2, 3, 3; 3, 3, 3; . . . schwarze Steine übrig geblieben sind, bis wir schliesslich zu dem vorliegenden Falle kämen, in welchem jeder Spieler 8 schwarze Steine besitzt. Da es aber über alle Maassen langweilig sein würde, alle diese einzelnen Schritte zu thuen, so will ich zeigen, auf welche Weise das Endresultat unmittelbarer dadurch gefunden werden kann, dass man nur die Hoffnungen jener Fälle bestimmt, in welchen die einzelnen Spieler noch gleich viele schwarze Steine haben. Diese Zahl der schwarzen Steine nenne ich c, die der weissen b und die aller $a = b + c$.

Zunächst sind alle Möglichkeiten zu betrachten, welche eintreten können, wenn jeder Spieler einen Stein von den seinigen fortnimmt. Offenbar ist es möglich, dass jeder der drei Spieler, dass nur zwei derselben, nur einer oder gar keiner einen weissen Stein zieht. Dann ist noch zu beachten, wieviele Fälle diesen verschiedenen Möglichkeiten entsprechen; diese Zahlen ergeben sich auf folgende Weise. Wenn Jemand wettet, dass A, B und C je einen weissen Stein ziehen, so hat er die Hoffnung $\frac{b^3}{a^3}$ Recht zu bekommen; wettet er, dass zwei der Spieler, A und B, oder A und C, oder B und C je einen weissen Stein ergreifen und der dritte einen schwarzen, so ist seine Hoffnung $\frac{b^2 c}{a^3}$; wettet er aber, das nur ein Spieler, A oder B oder C einen weissen Stein zieht, die übrigen Spieler aber schwarze, so hat er die Hoffnung $\frac{b c^2}{a^3}$; soll aber endlich keinem Spieler ein weisser Stein zufallen, so erhält er die Hoffnung $\frac{c^3}{a^3}$. (Alle diese Hoffnungen folgen aus dem Zusatze 1 zu der Regel am Ende der Aufgabe XII, da sie offenbar dieselben

sind, als wenn Jemand bei einer gleichen Anzahl von Fällen mit drei Würfen etwas dreimal, zweimal, einmal [64] oder gar keinmal erreichen will.) Die Zähler dieser Brüche bedeuten nach dem, was unter dem Buchstaben (J) zur Aufgabe XI bemerkt ist, die Zahlen der Fälle, in welchen jedes einzelne dieser Resultate erreicht werden kann.

Drittens muss man endlich noch beachten, dass nach dem Wortlaute der Aufgabe A gewinnen muss, sobald er allein oder mit einem der beiden andern oder mit jedem der beiden andern Spieler einen weissen Stein zieht. B aber gewinnt, wenn er allein oder mit C einen weissen Stein ergreift; C dagegen gewinnt nur, wenn er allein einen weissen Stein zieht. So oft es sich aber ereignet, dass keiner der drei Spieler einen weissen Stein ergreift, kommen sie zu den Hoffnungen, welche sie besitzen, wenn jeder einen schwarzen Stein weniger hat. Addirt man nun die jedem Spieler günstigen Fälle und die ihm ungünstigen, so findet man, dass A im Ganzen $b^3 + 2\,b^2c + bc^2$ Fälle für Gewinn und $b^2c + 2\,bc^2$ Fälle für Verlust hat, dass B aber $b^2c + bc^2$ Fälle für Gewinn und $b^3 + 2\,b^2c + 2\,bc^2$ Fälle für Verlust und C schliesslich bc^2 Fälle für Gewinn und $b^3 + 3\,b^2c + 2\,bc^2$ Fälle für Verlust hat. Alle drei Spieler aber haben je c^3 Fälle dafür, dass sie die Hoffnungen erlangen, welche einer um 1 niedrigeren Anzahl von schwarzen Steinen entsprechen; setzt man diese Hoffnungen gleich $\frac{p}{p+s+t}$, $\frac{s}{p+s+t}$, $\frac{t}{p+s+t}$, so wird nach Satz III die Hoffnung von

$$A: \frac{(b^3 + 2b^2c + bc^2)\cdot 1 + (b^2c + 2bc^2)\cdot 0 + c^3\cdot\frac{p}{p+s+t}}{a^3},$$

$$B: \frac{(b^2c + bc^2)\cdot 1 + (b^3 + 2b^2c + 2bc^2)\cdot 0 + c^3\cdot\frac{s}{p+s+t}}{a^3},$$

$$C: \frac{bc^2\cdot 1 + (b^3 + 3b^2c + 2bc^2)\cdot 0 + c^3\cdot\frac{t}{p+s+t}}{a^3}.$$

[65] Lässt man den gemeinsamen Nenner fort und multiplicirt

man mit $\frac{p+s+t}{c^3}$, so findet man für die Hoffnungen der drei Spieler die Verhältnisszahlen:

$$\left[(b^3+2b^2c+bc^2)\frac{p+s+t}{c^3}+p\right], \left[(b^2c+bc^2)\frac{p+s+t}{c^3}+s\right],$$
$$\left[bc^2\frac{p+s+t}{c^3}+t\right].$$

Nachdem diese Frage erledigt ist, kehren wir zur Lösung unserer Aufgabe zurück und nehmen zunächst an, dass jeder Spieler noch zwei schwarze Steine hat. Dann ist $b=4$, $c=2$ (für welche Zahlen die kleinsten theilerfremden Zahlen 2, 1 gesetzt werden können), und da die Hoffnungen in dem vorhergehenden Falle, in welchem jeder Spieler nur noch einen schwarzen Stein hat, sich verhalten wie $p:s:t=101:20:4$, also $p+s+t=125$, so ergeben sich nach den obigen Formeln für die Hoffnungen der drei Spieler die Verhältnisszahlen 2351, 770, 254.

Hat jeder Spieler noch drei schwarze Steine, so ist in den obigen Formeln $b=4$, $c=3$; $p=2351$, $s=770$, $t=254$ zu setzen; es werden dann die Verhältnisse der Hoffnungen durch die Zahlen 26851, 11270, 4754 ausgedrückt.

In gleicher Weise ergeben sich für die Hoffnungen in den Fällen, in welchen jeder der drei Spieler noch vier, fünf, sechs, sieben, acht schwarze Steine hat die Verhältnisszahlen[12]:

$\left(b=4,\ c=4,\ \frac{b}{c}=1\right)$	198351,	97020,	47629;
$\left(b=4,\ c=5,\ \frac{b}{c}=\frac{4}{5}\right)$	1087407,	590940,	322029,
oder durch 9 getheilt	120823,	65660,	35781;
$\left(b=4,\ c=6,\ \frac{b}{c}=\frac{2}{3}\right)$	532423,	312620,	183957;
$\left(b=4,\ c=7,\ \frac{b}{c}=\frac{4}{7}\right)$	1984423,	1236620,	771957;
$\left(b=4,\ c=8,\ \frac{b}{c}=\frac{1}{2}\right)$	6476548,	4231370,	2768457.

Diese letzten Zahlen aber bestimmen die in unserer Aufgabe gesuchten Verhältnisse der Hoffnungen von A, B und C.

b) Nach meiner Methode die Lösung abzuleiten, mag dem Leser überlassen bleiben; der Kürze wegen unterlasse ich, dies hier zu thun.

[66] III.

Aufgabe. A wettet mit B, dass er aus 40 Spielkarten, von denen je 10 von derselben Farbe sind, vier Karten verschiedener Farbe herausziehen wird. Die Hoffnung des A verhält sich zu der des B wie 1000 zu 8139.

Lösung. Man nehme zuerst an, dass schon 3 Karten von verschiedener Farbe gezogen sind. Es bleiben also von jeder dieser drei Farben 9 Karten übrig, also von allen drei Farben 27 Karten und 10 Karten von der vierten Farbe. A hat also beim Ziehen des vierten Kartenblattes 27 Fälle für Verlust und 10 für Gewinn; mithin ist seine Hoffnung gleich $\frac{10}{37}$ des Einsatzes.

Zweitens werde angenommen, dass zwei Karten verschiedener Farbe gezogen sind, mithin von diesen Farben noch 18 Karten übrig sind und 20 von den beiden andern Farben. Wenn nun A das dritte Blatt ziehen will, so hat er 18 Fälle für Verlust und 20 dafür, dass er drei Karten verschiedener Farbe und dadurch die vorige Hoffnung von $\frac{10}{37}$ erhält, was für ihn eine Hoffnung von $\frac{100}{703}$ bedeutet.

Ist erst eine Karte gezogen, so sind von dieser Farbe noch 9 Karten übrig und 30 von den andern Farben. Beim zweiten Zuge hat also A jetzt 9 Fälle für Verlust und 30 Fälle, in welchen er ein Blatt von andrer Farbe und damit die eben gefundene Hoffnung von $\frac{100}{703}$ erhalten kann. Folglich hat er die Hoffnung $\frac{1000}{9139}$.

Wenn noch gar keine Karte gezogen ist, so hat A die gleiche Hoffnung, da alle 40 Fälle ihn unbedingt in die vorher angenommene Lage versetzen. Da nun die Hoffnung des Gegners B gleich $\frac{8139}{9139}$ ist, so verhalten sich beider Hoffnungen wie 1000 zu 8139, wie *Huygens* angegeben hat.

Die Lösung dieser Aufgabe lässt sich auch auf anderem Wege, mit Hülfe der Combinationslehre finden, wie im dritten Theile, nachdem zuvor diese Lehre auseinandergesetzt worden ist, gezeigt werden wird.

[67] IV.

Aufgabe. Nachdem die Spieler A und B, wie zuvor, 12 Steine, 4 weisse und 8 schwarze genommen haben, wettet A mit B, dass er blindlings 7 Steine, unter denen sich drei weisse befinden sollen, ergreifen werde. Wie verhalten sich die Hoffnungen von A und B zu einander?

Diese Aufgabe müssen wir auch für den dritten Theil des Buches aufsparen, da zu ihrer Lösung die Kenntniss der Combinationslehre erforderlich ist.

V.

Aufgabe. A und B haben je 12 Münzen und spielen miteinander unter den folgenden Bedingungen: Wenn 11 Augen geworfen werden, so giebt A dem B eine Münze; werden aber 14 Augen geworfen, so erhält A von B eine Münze. Derjenige, welcher zuerst alle Münzen besitzt, hat das Spiel gewonnen. Für das Verhältniss der Hoffnungen von A und B findet man 244 140 625 : 282 429 536 481.

Lösung. Unter den mit drei Würfeln möglichen 216 verschiedenen Würfen befinden sich, wie erstens zu beachten ist, 15 Würfe mit 14 Augen und 27 Würfe mit 11 Augen. Folglich giebt es 15 Fälle, in denen A von B eine Münze erhält, und 27 Fälle, in denen B von A eine Münze bekommt; mithin bleiben noch 174 Fälle übrig, in denen jeder seine Anzahl Münzen und damit die bisherige Hoffnung behält.

Zweitens ist daran zu denken, dass diese 174 erfolglosen Fälle, in denen die Hoffnungen der Spieler unverändert bleiben, nach Satz III Zusatz 4 nicht berücksichtigt zu werden brauchen; man hat daher hier mit den drei Würfeln nur 42 Fälle, von denen 15 dem A und 27 dem B eine Münze bringen.

Drittens ist daran zu erinnern, dass für die Zahlen der Fälle 42, 15 und 27, da sie einen Factor gemeinsam haben, [68] nach Satz III Zusatz 2 die kleinsten theilerfremden Zahlen 14, 5 und 9 gesetzt werden können. Um die Lösung aber für den allgemeinen Fall zu geben, setze ich an deren Stelle wiederum die Buchstaben a, b und c.

Nach diesen Bemerkungen gehe ich nun, um die vorliegende Aufgabe zu lösen, in der Weise vor, dass ich der

Reihe nach frage, welche Hoffnungen die Spieler haben, wenn jeder von ihnen eine Münze, zwei, drei, vier, ... Münzen besitzt, und zwar gehe ich so weit, bis ich durch Induction auf die Hoffnungen der Spieler, wenn jeder 12 Münzen besitzt, schliessen kann.

Hat jeder Spieler nur eine Münze, so verhält sich offenbar die Hoffnung von A zu der von B wie b zu c.

Wenn jeder Spieler zwei Münzen besitzt, so bewirkt der erste Wurf, dass A entweder in den Besitz von 3 Münzen kommt oder dass ihm nur noch eine verbleibt. Bekommt er 3 Münzen in seinen Besitz, so hat er b Fälle, alle vier Münzen zu erhalten und damit den Einsatz 1 zu gewinnen, und c Fälle, in welchen ihm zwei Münzen übrig bleiben, er also zu seiner anfänglichen Hoffnung, welche mit z bezeichnet worden sei, zurückkehrt; dies giebt also $\frac{b+cz}{a}$. Hat A aber nur eine Münze behalten, so hat er b Fälle, um wieder zwei Münzen und damit die Hoffnung z zurück zu erlangen, und c Fälle für Verlust des ganzen Spieles; dies macht zusammen $\frac{bz}{a}$. Dafür aber, dass A nach dem ersten Wurfe drei Münzen hat, giebt es b Fälle, und dass er nur noch eine Münze hat, c Fälle; A hat also anfänglich b Fälle für $\frac{b+cz}{a}$ und c Fälle für $\frac{bz}{a}$. Folglich ergiebt sich für seine Hoffnung z die Gleichung:

$$z = \frac{b^2 + 2bcz}{a^2},$$

woraus

$$z = \frac{b^2}{a^2 - 2bc} = \frac{b^2}{b^2 + c^2}$$

folgt; für B bleibt mithin die Hoffnung $\frac{c^2}{b^2+c^2}$ übrig. Es verhalten sich daher beider Hoffnungen wie b^2 zu c^2.

Hat jeder Spieler ursprünglich drei Münzen in seinem Besitze, so erhält A durch den ersten Wurf entweder noch eine vierte Münze zu den seinigen hinzu oder er verliert eine derselben und behält nur zwei Münzen übrig; die diesen beiden Fällen entsprechenden Hoffnungen seien mit x und y

bezeichnet. Wenn A in den Besitz von 4 Münzen gekommen ist, so bekommt er selbst entweder [69] von B zuerst dessen zwei letzten Münzen und gewinnt den Einsatz 1, wofür es b^2 Fälle giebt, oder B erhält von ihm zwei Münzen, sodass A nur noch zwei Münzen übrig behält, wofür es c^2 Fälle giebt (dies folgt aus dem im vorigen Abschnitte Gezeigten in Verbindung mit der Anmerkung (J) zu der Aufgabe XI). A hat also b^2 Fälle für 1 und c^2 Fälle für y, woraus sich für ihn die Hoffnung $\frac{b^2+c^2y}{b^2+c^2}$ ergiebt; da diese Hoffnung mit x bezeichnet ist, so folgt

$$x=\frac{b^2+c^2y}{b^2+c^2} \text{ oder } y=\frac{(b^2+c^2)x-b^2}{c^2}.$$

Sind A aber nur zwei Münzen übrig geblieben, so hat er b^2 Fälle, um zwei andere Münzen dazu zu erhalten, also die Hoffnung x wieder zu bekommen, und c^2 Fälle, um seine zwei Münzen ebenfalls noch zu verlieren und mit ihnen zugleich den ganzen Einsatz. Daraus ergiebt sich für diese Hoffnung, welche mit y bezeichnet war, die Gleichung:

$$y=\frac{b^2x}{b^2+c^2}.$$

Verbindet man diesen Werth mit dem zuerst für y gefundenen, so ist $\frac{b^2x+c^2x-b^2}{c^2}=\frac{b^2x}{b^2+c^2}$, aus welcher Gleichung:

$$x=\frac{b^4+b^2c^2}{b^4+b^2c^2+c^4}$$

folgt; für y ergiebt sich der Werth:

$$y=\frac{b^4}{b^4+b^2c^2+c^4}.$$

Jetzt erst kann man an die Bestimmung der Hoffnungen, welche A und B in dem vorliegenden Falle haben, herangehen. Anfänglich hat jeder der Spieler drei Münzen, und es kann in b Fällen geschehen, dass A nach dem ersten Wurfe von B eine Münze und damit also die eben berechnete Hoffnung x erhält, und in c Fällen, dass A dem B eine Münze geben muss und dadurch die Hoffnung y bekommt. Die Hoffnung von

A hat daher den Werth $\frac{bx+cy}{b+c}$ oder, für x und y die gefundenen Werthe eingesetzt, $\frac{b^3}{b^3+c^3}$, und es bleibt $\frac{c^3}{b^3+c^3}$ für die Hoffnung von B übrig. Die Hoffnungen beider Spieler verhalten sich mithin wie b^3 zu c^3.

Da nun gefunden wurde, dass die Hoffnungen von A und B sich wie die Zahlen b zu c verhalten, wenn jeder Spieler eine Münze hat, dass sie sich wie die Quadrate dieser Zahlen verhalten, wenn jeder Spieler zwei Münzen besitzt, und wie die Cuben, wenn jeder Spieler drei Münzen hat, so schliessen wir durch Induction weiter, dass bei beliebig vielen Münzen die Hoffnungen immer im Verhältniss der Potenzen von b und c stehen, deren Exponenten gleich der Anzahl der Münzen ist, welche jeder Spieler anfänglich besitzt. [70] Folglich verhalten sich in der vorliegenden *Huygens*'schen Aufgabe, wo jeder Spieler 12 Münzen in seinem Besitze hat, die Hoffnungen von A und B zu einander, wie

$$b^{12} : c^{12} = 5^{12} : 9^{12} = 244\,140\,625 : 282\,429\,536\,481,$$

wie *Huygens* angegeben hatte.

Dieses Resultat kann man auch ohne Rechnung folgendermaassen finden. Wenn A alle Münzen bis auf eine gewonnen hat, so hat er b Fälle für Gewinn, und B hat, wenn er alle Münzen bis auf eine gewonnen hat, c Fälle für Gewinn. Hat A alle Münzen bis auf zwei gewonnen, so hat er b Fälle, um alle Münzen bis auf eine, d. h. die b vorigen Fälle zu erhalten; er hat also $b \cdot b = b^2$ Fälle für Gewinn; B hat, wenn er sich in der gleichen Lage befindet, c^2 Fälle für Gewinn. Es giebt also für jede Münze, welche den Spielern, um zu gewinnen, fehlt, b Fälle für A und c Fälle für B, in welchen sie zu den Hoffnungen des vorhergehenden Falles gelangen können. Wenn nun bei Beginn des Spieles jeder Spieler 12 Münzen hat und ihm mithin noch ebenso viele Münzen, um zu gewinnen, fehlen, so geben die zwölften Potenzen von b und c das Verhältniss ihrer Hoffnungen an, genau wie oben gefunden wurde.

Derjenige aber, welchem diese Berechnung noch nicht evident genug ist, und welcher auch den Inductionsschluss nicht als genügenden Beweis ansieht, kann durch ein ähnlich abkürzendes Verfahren, wie es *Huygens* bei der Aufgabe XI benutzte, zum Ziele gelangen, indem er nämlich sofort zu dem

Falle von sechs und von diesem zu dem von zwölf Münzen übergeht, mit Nichtberücksichtigung aller dazwischen liegenden Fälle. Aber auch hierzu bedarf es keiner weiteren Rechnung; denn die Rechnung, welche für die Annahme, dass jeder Spieler zwei Münzen besitzt, durchgeführt worden ist, gilt auch, wenn an Stelle einer Münze eine beliebige Anzahl, z. B. n Münzen und an Stelle von zwei Münzen $2n$ Münzen gesetzt werden, wenn nur statt der Zahlen b und c der Fälle, in welchen einer von beiden Spielern eine Münze gewinnt oder verliert, die Zahlen der Fälle eingesetzt werden, in welchen jener n Münzen gewinnen oder verlieren kann. Von hier leitet man dann völlig streng ab, dass das Verhältniss der Hoffnungen, welche die Spieler haben, wenn sie $2n$ Münzen besitzen, gleich dem Quadrate des Verhältnisses ist, welches sich ergiebt, wenn jeder Spieler n Münzen hat. Da nun oben im Falle von drei Münzen das Verhältniss der Hoffnungen gleich $b^3 : c^3$ gefunden worden ist, so ist es im Falle von 6 Münzen gleich $b^6 : c^6$ und folglich weiter im Falle von 12 Münzen gleich $b^{12} : c^{12}$, wie auch durch Induction geschlossen worden war.

[71] Ich habe so zwar die Hoffnungen der Spieler für den Fall ermittelt, dass beide gleich viele Münzen besitzen, nicht aber die eines beliebigen Falles, zu welchem sie im Verlaufe des Spieles kommen können und in welchem der eine mehr, der andere weniger Münzen besitzt. Auch für das Verhältniss dieser Hoffnungen lässt sich eine allgemeine Formel angeben. Ist m die Anzahl der Münzen, welche A besitzt, und n die Anzahl der Münzen, welche B hat, so finde ich, dass sich die Hoffnung von A zu der von B verhält wie $m : n$, wenn $b = c$ ist, und wie

$$(b^n c^m - b^{m+n}) : (c^{m+n} - b^n c^m).$$

Da aber der Beweis[13]) dieser Formeln eine mühsamere Rechnung erfordert, so überlasse ich dem Leser, ihn zu führen, und wende mich unverzüglich dem zweiten Theile meines Buches zu.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

(Ars conjectandi)

von

Jakob Bernoulli.

Basel 1713.

Zweiter Theil.

Permutations- und Combinationslehre.

---

[72] Die unendliche Mannigfaltigkeit, welche sich sowohl in den Werken der Natur als auch in den Handlungen der Menschen zeigt, und welche die hervorragende Schönheit des Weltalls begründet, kann augenscheinlich in nichts Anderem ihren Grund haben, als in der verschiedenartigen Zusammensetzung, Vermischung und Gruppirung der einzelnen Theile. Da aber die Menge der Dinge, welche zur Hervorbringung einer Erscheinung oder eines Ereignisses zusammenwirken, oft eine so grosse und so verschiedenartige ist, dass die Erforschung aller Wege, auf welchen ihre Zusammensetzung oder Vermischung geschehen, bez. nicht geschehen kann, den grössten Schwierigkeiten begegnet, so ist es nicht zu verwundern, dass selbst die klügsten und umsichtigsten Menschen in keinen Fehler öfter verfallen, als in denjenigen, welcher in der Logik die ungenügende Aufzählung der Theile genannt wird. Daher nehme ich keinen Anstand zu behaupten, [73] dass dieser Fehler fast die einzige Quelle von unendlich vielen der schwerwiegendsten Irrthümer ist, welche wir in unseren Ueberlegungen, um die Dinge zu erkennen oder zu verwerthen, täglich begehen.

Deshalb ist die Combinatorik genannte Kunst mit vollem *Recht als* äusserst nützlich anzusehen, da sie geeignet ist,

diesem Mangel unserer sinnlichen Wahrnehmung abzuhelfen; sie lehrt alle möglichen Arten, nach welchen mehrere Dinge vermischt, gruppirt und miteinander zusammengesetzt werden können, so aufzuzählen, dass wir sicher sind, keine von ihnen ausgelassen zu haben, welche unserem Vorhaben nützlich ist. Obgleich dieses Verfahren zwar in so weit der mathematischen Speculation angehört, als in ihm die Rechnung verwendet wird, so ist es doch hinsichtlich seines Nutzens und seiner Unentbehrlichkeit ganz universell und so beschaffen, dass ohne dasselbe weder die Weisheit des Philosophen, noch die Genauigkeit des Historikers, noch die Diagnose des Arztes, noch die Klugheit des Politikers bestehen kann. Als Argument hierfür sei nur gesagt, dass ihrer aller Thätigkeit auf Vermuthungen sich stützt, und dass jede Vermuthung auf Combinationen der wirkenden Ursachen beruht.

Daher haben auch einige bedeutende Männer: *Schooten*, *Leibniz*, *Wallis*, *Prestet*[14]) sich mit diesem Gegenstande beschäftigt, was wir erwähnen, um der irrthümlichen Annahme vorzubeugen, dass alles neu sei, was wir vorzutragen beabsichtigen. Jedoch haben wir auch verschiedene eigene Resultate von nicht zu unterschätzender Bedeutung hinzugefügt, so besonders den allgemeinen und leichtverständlichen Beweis für die Eigenschaften der figurirten Zahlen; auf diesen, welcher unseres Wissen noch von Niemand vor uns gegeben oder gefunden ist, stützen sich viele weitere Resultate.

Da also einerseits noch kein fertiges System der Combinatorik vorhanden ist, und um nicht andererseits das, was wir nöthig haben, von anderen Orten entlehnen zu müssen, scheint es sich zu empfehlen, *ab ovo* zu beginnen und die Lehre von den ersten Grundlagen an zu entwickeln, damit nichts unbewiesen bleibt. Dies werden wir kurz und bündig thun und zwar soweit als es für unser Vorhaben erforderlich erscheint.

[**74**] Das erste Kapitel umfasst die Lehre von den Permutationen; die Kapitel II bis VI enthalten die Lehre von den Combinationen und die drei letzten Kapitel VII bis IX behandeln Combinationen in Verbindung mit ihren Permutationen[15]).

Kapitel I.

Permutationen.

Permutationen von Dingen nenne ich die Aenderungen, durch welche unter Beibehaltung derselben Anzahl von Dingen ihre Ordnung und Stellung verschiedentlich vertauscht wird.

Wenn also darnach gefragt ist, wie oft einige Dinge unter einander umgestellt und vertauscht werden können, so sagt man, dass alle Permutationen jener Dinge gesucht werden.

Permutirt werden aber können alle Dinge, mögen sie unter sich sämmtlich verschieden oder mögen einige von ihnen einander gleich sein. Dies werden wir mit ebenso vielen, verschiedenen oder gleichen Buchstaben des Alphabets bequem zeigen.

1. Alle Dinge, welche permutirt werden sollen, sind von einander verschieden.

Da die Anzahl der Permutationen von mehreren Dingen nicht gefunden werden kann, wenn nicht zuvor diese Zahlen für jede kleinere Anzahl von Dingen bestimmt worden sind, so muss man bei dieser Untersuchung offenbar synthetisch vorgehen und mit den allereinfachsten Fällen beginnen.

Bei einem Dinge oder einem Buchstaben a ist nur eine Stellung möglich.

Von zwei Dingen oder Buchstaben a und b geht entweder a voraus und b folgt, oder geht b voraus und a folgt; es giebt daher zwei Anordnungen ab und ba.

Drei Buchstaben a, b, c lassen sich so anordnen, dass an der ersten Stelle entweder a oder b oder c steht. Steht a am Anfange, [75] so können die beiden anderen Buchstaben, wie wir gesehen haben, auf zweierlei Weise angeordnet werden; ebenso ist, wenn b am Anfange steht, für die beiden andern Buchstaben eine doppelte Anordnung möglich, und dasselbe gilt, wenn der dritte Buchstabe c an die erste Stelle gesetzt ist. Folglich giebt es für drei Buchstaben insgesammt $3 \cdot 2 = 6$ Permutationen, nämlich abc, acb; bac, bca; cab, cba.

Sind vier Buchstaben a, b, c, d gegeben, so kann in gleicher Weise jeder derselben die erste Stelle einnehmen, während die drei übrigen, wie eben gezeigt worden ist, $3 \cdot 2 = 6$ mal ihre Reihenfolge wechseln können. Da nun

vier Buchstaben an erster Stelle stehen können, so folgt, dass alle vier Buchstaben $4 \cdot 3 \cdot 2 = 4 \cdot 6 = 24$ mal unter einander vertauscht werden können.

Aus dem gleichen Grunde sind, wenn noch ein fünfter Buchstabe e hinzukommt, fünfmal so viele Aenderungen als im vorigen Falle möglich, also $5 \cdot 24 = 120$. Allgemein ist daher für beliebig viele Buchstaben die Permutationszahl um so vielmal grösser als die Anzahl der Permutationen, welche aus einer um 1 kleineren Zahl von Buchstaben gebildet werden können, als die gegebene Anzahl von Buchstaben Einheiten enthält. Daraus ergiebt sich ganz von selbst die folgende

Regel

zur Auffindung der Anzahl aller Permutationen für eine beliebige Zahl von Dingen:

Man multiplicire alle ganzen Zahlen von 1 bis zur gegebenen Zahl in ihrer natürlichen Reihenfolge ineinander; das Product liefert die gesuchte Anzahl.

Wenn z. B. die Anzahl der gegebenen Dinge gleich n ist, so ist die Anzahl aller Permutationen gleich $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots n$ oder auch (weil die Einheit nicht multiplicirt) $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots n$, wobei die Punkte zwischen 5 und n hier und in allen ähnlichen Fällen die dazwischen liegenden Zahlen andeuten. Für $n = 7$ ist also die Permutationszahl $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$. Die folgende Tafel giebt die Permutationszahlen bis $n = 12$: [**76**]

Anzahl der Dinge:	1	2	3	4	5	6	7	8
Permutationszahl:	1	2	6	24	120	720	5040	40320

Anzahl der Dinge:	9	10	11	12
Permutationszahl:	362880	3628800	39916800	479001600.

2. Einige der Dinge, welche permutirt werden sollen, sind einander gleich.

Wenn ein oder mehrere Buchstaben öfter wiederkehren, d. h. wenn in der gegebenen Anzahl von Dingen einige einander gleich sind, z. B. wenn $aaabcd$, wo a dreimal auftritt, gegeben ist, so ist die Anzahl der Permutationen kleiner. Um diese zu finden, muss man bedenken, dass, wenn in unserem Beispiele alle Buchstaben untereinander verschieden wären, z. B. $a\alpha\mathfrak{a}$ an Stelle von aaa geschrieben wäre, die drei Buchstaben, ohne dass man einen andern Buchstaben umstellte,

sechsmal unter sich vertauscht werden könnten (nach der vorigen Regel), wodurch sich eben so viele verschiedene Permutationen ergeben würden. Hier aber, wo die drei Buchstaben gleich sind, führen die sechs Permutationen von *aaa* keine Veränderung in der Reihenfolge aller Buchstaben herbei und sind daher für eine einzige zu zählen. Da man nun bei jeder Anordnung der Buchstaben den gleichen Schluss machen muss, so folgt, dass die Permutationszahl sechsmal — d. i. sovielmal als die gleichen Dinge unter sich permutirt werden können — kleiner ist als die Zahl der Permutationen, welche die gegebenen Dinge mit einander bilden würden, wenn sie sämmtlich von einander verschieden wären. Bei sechs verschiedenen Buchstaben sind 720 Permutationen möglich, folglich sind hier, wo drei von ihnen einander gleich sind, 120 Permutationen vorhanden.

Sind ferner die sechs Buchstaben *aaabbc* gegeben, wo ausser dem ersten dreimal wiederkehrenden Buchstaben *a* noch der zweite Buchstabe *b* zweimal vorkommt, so muss, wie sofort einleuchtet, die Permutationszahl noch um die Hälfte kleiner, als im vorhergehenden Falle, und mithin gleich 60 sein. Denn je zwei Permutationen, [**77**] welche durch Vertauschung der zwei Buchstaben *bb*, wenn sie verschieden wären, aus einander entstehen würden, fallen jetzt in eine zusammen. In gleicher Weise kann man schliessen, dass, wenn noch mehrere Buchstaben öfter sich wiederholen, die Permutationszahl durch die Zahlen getheilt werden muss, welche angeben, wie oft diese gleichen Buchstaben einzeln unter sich permutirt werden können. Daraus ergiebt sich die

Regel

zur Auffindung der Permutationszahl, wenn einige Dinge gleich sind:

Die Anzahl der Permutationen, welche die gegebenen Dinge, wenn sie sämmtlich von einander verschieden wären, zulassen würden, theile man durch alle Permutationszahlen, welche zu den einzelnen Gruppen der mehrfach vorkommenden Dinge gehören.

Die Lehre von den Permutationen ist wichtig, um die Anzahl der möglichen Umstellungen der Buchstaben (der sog. *Anagramme*[16]) irgend eines Wortes zu bestimmen. So lassen z. B. die

Buchstaben des Wortes Roma nach der ersten Regel $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ Umstellungen zu, da die vier Buchstaben verschieden von einander sind; dagegen sind in dem Worte Leopoldus $\frac{362\,880}{2 \cdot 2} = 90\,720$ und in dem Worte Studiosus $\frac{362\,880}{2 \cdot 6} = 30\,240$ Umstellungen der Buchstaben möglich nach der zweiten Regel, da in dem ersten Worte die Buchstaben *l* und *o* doppelt, in dem zweiten Worte *u* zweimal und *s* dreimal vorkommen.

Hierher gehören auch einige Verse, welche wegen der vielfachen Abänderungen, welche sie zulassen, Proteus-Verse genannt werden, und unter denen die von *Lansius*, *Scaliger*, *Bauhusius*[17]) berühmt geworden sind. *Thomas Lansius* verdanken wir das folgende Distichon:

Lex, Rex, Grex, Res, Spes, Jus, Thus, Sal, Sol, (bona) Lux, Laus:
Mars, Mors, Sors, Lis, Vis, Styx, Pus, Nox, Faex, (mala) Crux, Fraus;

[78] in jedem der beiden Verse können die elf einsilbigen Wörter (die zweisilbigen Wörter bona und mala müssen immer im fünften Versfusse stehen) 39 916 800 mal umgestellt werden, ohne die Gesetze der Metrik zu verletzen. Bei anderen Versen geschieht es zwar, dass sehr viele der Umstellungen gegen die Gesetze der Metrik verstossen oder keinen Sinn ergeben, aber meistens lassen sich dann mit geringer Mühe die brauchbaren Umstellungen von den unbrauchbaren trennen und lässt sich die Anzahl der ersteren für sich bestimmen, wenn man bei ihrer Aufsuchung nur eine bestimmte Reihenfolge inne hält. Dies kann man an dem folgenden Hexameter sehen:

Tot Tibi sunt dotes, Virgo, quot sidera coelo,

welchen der Jesuit *Bernhard Bauhusius* aus Löwen zum Lobe der Mutter Gottes erdacht hat und welchen mehrere ausgezeichnete Männer einer eigenen Untersuchung werth erachtet haben. *Erycius Puteanus* zählt in seinem Schriftchen »Thaumata Pietatis« (Wunder der Frömmigkeit) die brauchbaren Abänderungen auf vollen 48 Seiten auf und bringt ihre Zahl mit der Zahl der Sterne, welche man gewöhnlich gleich 1022 annimmt, in Uebereinstimmung, indem er sorgfältig die Umstellungen weglässt, welche aussagen, dass es so viele Sterne am Himmel giebt, als Maria Gaben besitzt, da ihrer weit mehr seien als Sterne. Diese Zahl 1022 hat dann Gerhard

Vossius von *Puteanus* in sein Werk »De scientiis mathematicis (Kap. 7) übernommen. Der französische Mathematiker *Prestet* giebt in der ersten Ausgabe seiner »Elemens des Mathematiques« (S. 348) die Zahl der brauchbaren Umstellungen dieses Proteus-Verses auf 2196 an, welche Zahl er nach einer Revision in der zweiten Ausgabe seines Werkes (Band I, S. 133) fast um die Hälfte grösser, nämlich gleich 3276 angiebt. Fleissige Leser der »Acta Erud. Lipsiae.« (Juni 1686) bestimmen bei der Besprechung von *Wallis'* »treatise of algebra« die fragliche Zahl (welche *Wallis* zu bestimmen nicht unternommen hatte) auf 2580. *Wallis* selbst hat später in der lateinischen Bearbeitung seines Buches (Opera, Band II, S. 494. Oxford 1693) für diese Zahl den Werth 3096 angegeben. Aber alle diese Angaben sind falsch, und man muss sich mit Recht wundern, dass so viele scharfdenkende Männer, auch trotz wiederholter Prüfung, sich in einer so leichten Frage getäuscht haben. Aus meiner Untersuchung finde ich, dass dieser Vers von *Bauhusius*, nach Ausschluss der spondeischen Verse, aber mit Zulassung der Verse, welche keine Cäsur haben, im ganzen 3312 Umstellungen zulässt, ohne dass die Gesetze der Metrik verletzt werden. Es würde aber zu weitläufig sein, dies hier näher zu begründen, und sich auch mit dem Zwecke dieses Buches nicht vertragen*).

[82]

Kapitel II.

Von den Combinationen im Allgemeinen; Combinationen ohne Wiederholung zu allen Classen zusammen.

Combinationen von Dingen sind Verbindungen solcher Art, dass aus einer gegebenen Anzahl von Dingen einige herausgenommen und mit einander verbunden werden, ohne dass ihre Ordnung und Stellung irgendwie berücksichtigt wird.

Wenn also darnach gefragt ist, wie oft aus einer gegebenen Anzahl von Dingen je zwei oder je drei oder je vier oder . . . abgesondert werden können, ohne dass in einer Verbindung ein Ding öfter als einmal genommen wird, so

---

*) Wegen des Fehlens der Seitenzahlen 79, 80, 81 verweise ich auf die Anmerkung 17. *H.*

an, dass alle möglichen Combinationen jener Dinge ge-
rerden.

Zahl, welche angiebt, wieviele der gegebenen Dinge
ıander verbunden werden sollen, heisst die Classe
abination[18]). Wenn also zwei Dinge genommen werden,
die Classe 2; bei drei Dingen ist die Classe 3,
r Dingen 4, und so fort. Die zu diesen Classen
;en Verbindungen der Dinge nennt man Binarien,
rien, Quarternarien, u. s. w. oder Binionen, Ter-
ı, Quaternionen, u. s. w.; entsprechend redet man
ıionen oder Unitates, wenn die Dinge einzeln ge-
ı werden, und von Nullionen, wenn man gar kein
immt.

Verbindungen selbst nennen einige Schriftsteller auch
nationen, Conternationen, Conquaternationen,
, welche man allgemein unter dem einen Worte Com-
onen zusammenzufassen pflegt, wenn schon dieses Wort
gem Sinne nur jene Verbindungen bezeichnet, in welchen
ei Dinge mit einander verbunden sind. Deshalb wollen
Schriftsteller lieber das allgemeinere Wort Compli-
oder Complexion angewendet wissen; noch andere
passender Electionen, worunter sie auch die Fälle
eifen, dass ein oder gar kein Ding herausgenommen wird.

Dinge aber, welche mit einander combinirt werden
können entweder sämmtlich von einander verschieden
eilweise einander gleich sein; sie sollen entweder so
rt werden, dass in keiner Combination ein und das-
ing öfter enthalten ist, als es in der gesammten Zahl
gebenen Dinge vorkommt, oder so, dass in derselben
ation ein Ding auch öfter wiederkehrt, d. h. dass es
ıit sich selbst combinirt werden kann. Ferner kann
er Zahl der Combinationen [83] entweder zu allen
zusammen oder zu jeder einzelnen allein gefragt
. Weiter können für jede einzelne dieser Combinations-
mehrere Fragen aufgeworfen und Aufgaben gestellt
; wir werden von ihnen aber nur jene berühren, welche
genden für uns von Bedeutung sind.

Venn alle zu combinirenden Dinge von ein-
der verschieden sind und in keiner Combina-
n ein und dasselbe Ding zweimal vorkommen
rf, so sind alle Combinationen zu allen Classen
sammen zu finden.

Es sollen die Buchstaben a, b, c, d, e, . . . auf alle Arten (ohne Wiederholung) combinirt werden. Hierzu bildet man sich ebenso viele Zeilen, als Buchstaben vorhanden sind, in folgender Weise:

In die erste Zeile schreibt man den Buchstaben a allein.

In die zweite Zeile schreibt man zuerst b allein, dann mit a verbunden, sodass man ab oder ba hat. Da die Reihenfolge der Buchstaben unberücksichtigt bleibt, so zählen die beiden Verbindungen ab und ba für eine einzige.

In die dritte Zeile schreibt man erst c allein, dann in Verbindung mit a und b, sodass die Binionen ac und bc entstehen, und schliesslich in Verbindung mit der Binion ab, sodass die Ternion abc sich ergiebt.

In der vierten Zeile setzt man d allein an die erste Stelle, dann d in Verbindung mit jedem einzelnen vorhergehenden Buchstaben a, b, c, dann d in Verbindung mit jeder der Binionen ab, ac, bc und schliesslich in Verbindung mit der Ternion abc; es entstehen so die neuen Binionen ad, bd, cd, die Ternionen abd, acd, bcd und die Quaternion $abcd$.

$$\begin{array}{l}
a; \\
b,\ ab; \\
c,\ ac,\ bc,\ abc; \\
d,\ ad,\ bd,\ cd,\ abd,\ acd,\ bcd,\ abcd; \\
\left\{\begin{array}{l} e,\ ae,\ be,\ ce,\ de,\ abe,\ ace,\ bce,\ ade,\ bde,\ cde, \\ \quad abce,\ abde,\ acde,\ bcde,\ abcde. \end{array}\right.
\end{array}$$

In gleicher Weise bildet man die fünfte Zeile, welche mit dem Buchstaben e allein beginnt und dann e in Verbindung mit sämmtlichen Combinationen der früheren Zeilen enthält. Auf dieselbe Weise fährt man fort, wenn noch mehr Buchstaben gegeben sind. [84] Dieses Verfahren zeigt völlig deutlich, dass die gegebenen Buchstaben in jenen Zeilen auf alle möglichen Arten unter einander verknüpft sind und dass es keine Combination giebt, welche sich nicht in einer der Zeilen vorfindet, dass aber auch keine doppelt vorkommt. Alle Zeilen zusammen bieten mithin sämmtliche möglichen Combinationen dar, welche von den gegebenen Buchstaben gebildet werden können.

Die Anzahl aller dieser Combinationen aber findet man leicht, wenn man beachtet, dass in jeder beliebigen Zeile eine Combination mehr auftritt als in sämmtlichen vorhergehenden Zeilen zusammengenommen; denn der Buchstabe, mit welchem

die Zeile beginnt, tritt zuerst allein auf und dann in Verbindung mit allen Combinationen der vorhergehenden Zeilen. Daraus folgt, dass, weil in der ersten Zeile eine Combination steht, in der zweiten Zeile zwei Combinationen stehen, in der dritten 4, in der vierten 8, und so fortschreitend in geometrischer Progression mit dem Quotienten 2. Es ist ja bekannt, dass die geometrische Reihe mit dem Quotienten 2 und dem Anfangsgliede 1 die Eigenschaft hat, dass die Summe beliebig vieler ihrer Glieder vermehrt um 1 gleich dem folgenden Gliede ist. Nun ist die Summe der Combinationen aller Zeilen gleich der Summe ebenso vieler Glieder der genannten geometrischen Reihe, d. h. nach der eben erwähnten Eigenschaft gleich dem folgenden Gliede dieser Reihe vermindert um 1; dieses folgende Glied ist aber gleich dem Producte so vieler Zweien, als ihm Glieder in der Reihe vorangehen, d. h. als die gesuchten Combinationen Zeilen bilden. Daraus entspringt die folgende

Regel
für die Bestimmung der Anzahl aller Combinationen, welche gegebene Dinge zu allen Classen bilden:

Man multiplicire die Zahl 2 so oft in sich selbst, als die Anzahl der gegebenen Dinge angiebt, und subtrahire davon 1; die Differenz ist die gesuchte Zahl.

Sind also n Dinge gegeben, so ist die Anzahl aller Combinationen zusammen, d. h. aller Unionen, Binionen, Ternionen u. s. w. gleich $2^n - 1$. Nimmt man noch die Nullion hinzu, das ist die Combination, in welche keines der gegebenen Dinge aufgenommen wird und welche bei jeder beliebigen Anzahl von Dingen nur einmal vorhanden ist und sein kann, [85] so wird jene Zahl gleich 2^n. Wenn man aber die Nullion und alle Unionen, deren Anzahl gleich der Zahl der jeweils gegebenen Dinge ist, fortlässt, so ergiebt sich die Anzahl der Binionen, Ternionen und der übrigen Complexionen gleich $2^n - n - 1$. Z. B. ist die Anzahl aller verschiedenen Conjunctionen oder Complicationen der sieben Planeten gleich $2^7 - 1 = 127$. Nimmt man davon die sieben Electionen weg, welche nur je einen Planeten enthalten und eigentlich keine Conjunctionen, sondern Disjunctionen der Planeten sind, so ist die Anzahl aller übrigen eigentlichen Conjunctionen.

je zwei, je drei, u. s. w., schliesslich alle sieben Planeten mit einander verbinden, gleich $2^7 - 7 - 1 = 120$. So können die zwölf sogenannten Register oder ordines fistularum an der Orgel, durch welche der Ton bald pfeifend, bald tremolirend oder anderswie modificirt wird, auf $2^{12} - 1 = 4095$ verschiedene Weisen mit einander combinirt gezogen werden.

Bemerkung. Wenn man die Zeilen der Combinationen in der obigen Tafel genau betrachtet, so bemerkt man, dass in jeder Zeile (mit Ausnahme der ersten, welche nur die eine Union a enthält) die Zahl der Combinationen zu geraden Classen gleich der zu ungeraden ist. Nachdem man diese Wahrnehmung für einige der ersten Zeilen als richtig erkannt hat, schliesst man, dass sie auch für die nächstfolgende Zeile noch richtig ist. Denn verbindet man den Buchstaben, mit welchem diese Zeile beginnt, einerseits mit den Combinationen zu ungeraden Classen und andererseits mit den Combinationen zu geraden Classen aller vorangehenden Zeilen (einschl. der ersten), so erhält man die Combinationen zu ungeraden, bez. zu geraden Classen der folgenden Zeile; zu den ersteren hat man nun noch die Union a selbst hinzuzunehmen. Dann ist offenbar auch in dieser Zeile die Zahl der Combinationen zu ungeraden Classen gleich der zu geraden. In allen Zeilen zusammen übertrifft aber die erstere Zahl die letztere um 1; beide Zahlen sind einander gleich, wenn noch die Nullion hinzugenommen wird.. Da nun die Anzahl aller Combinationen (einschl. der Nullion) gleich 2^n ist, so giebt die Hälfte derselben, d. i. 2^{n-1} die Anzahl aller Combinationen zu ungeraden Classen und, wenn man die Nullion wieder fortlässt, $2^{n-1} - 1$ die Anzahl aller Combinationen zu geraden Classen. Dies wird auch weiter unten in dem Zusatz 6 zu Kapitel IV gezeigt werden.

[86]

Kapitel III.

Combinationen (ohne Wiederholung) zu bestimmten Classen; figurirte Zahlen und ihre Eigenschaften.

Aus der Combinationstafel im vorigen Kapitel ist deutlich zu erkennen, dass der Buchstabe, mit welchem eine Zeile beginnt, die sämmtlichen Binionen derselben liefert, wenn man

ihn mit den Unionen aller vorangehenden Zeilen verbindet; dass er in Verbindung mit den Binionen, Ternionen, u. s. w. der vorangehenden Zeilen die Ternionen, Quaternionen, u. s. w. seiner Zeile ergiebt. Folglich ist in einer beliebigen Zeile die Anzahl der Binionen gleich der Summe der Unionen, die Anzahl der Ternionen gleich der Summe der Binionen, die Anzahl der Quaternionen gleich der Summe der Ternionen in allen früheren Zeilen, u. s. w.; allgemein ist die Anzahl der Combinationen zu einer bestimmten Classe in irgend einer Zeile gleich der Summe der Combinationen zu der um 1 niedrigeren Classe in allen früheren Zeilen. Daraus folgt:

Die Unionen, von welchen in jeder Zeile nur eine vorkommt, bilden die Reihe 1, 1, 1, 1, 1, ... oder die Reihe der Einheiten.

Binionen giebt es in der ersten Zeile keine, in der zweiten eine, in der dritten $1 + 1 = 2$, in der vierten $1 + 1 + 1 = 3$, in der fünften $1 + 1 + 1 + 1 = 4$, u. s. w. Alle Binionen zusammen bilden daher die Reihe 0, 1, 2, 3, 4, ..., d. i. die Reihe der natürlichen Zahlen.

Ternionen giebt es in der ersten und zweiten Zeile keine, in der dritten Zeile eine, in der vierten $1 + 2 = 3$, in der fünften $1 + 2 + 3 = 6$, in der sechsten $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, u. s. w. Alle Ternionen zusammen bilden die Zahlenreihe 0, 0, 1, 3, 6, 10, 15, ..., d. i. die Reihe der sogenannten Dreieckszahlen.

Quaternionen giebt es in den ersten drei Reihen keine, in der vierten eine, in der fünften $1 + 3 = 4$, in der sechsten $1 + 3 + 6 = 10$, in der siebenten $1 + 3 + 6 + 10 = 20$, u. s. w. Alle diese Zahlen bilden zusammen die Reihe 0, 0, 0, 1, 4, 10, 20, ..., d. i. die Reihe der Viereckszahlen.

[**87**] In gleicher Weise bestimmen die Quinionen die Reihe der Fünfeckszahlen 0, 0, 0, 0, 1, 5, 15, 35, ..., die Senionen die Reihe der Sechseckszahlen 0, 0, 0, 0, 0, 1, 6, 21, ...; und andere Combinationen zu höheren Classen liefern weitere Reihen figurirter Zahlen immer höheren Grades, bis in's Unendliche.

So sind wir bei Gelegenheit der Combinationslehre unvermuthet zur Betrachtung der figurirten Zahlen geführt worden; mit diesem Namen werden allgemein alle Zahlen bezeichnet, welche durch fortgesetzte Addition der natürlichen Zahlen und der auf diese Weise entstandenen erzeugt werden.

Damit aber diese Reihen der figurirten Zahlen auf einen Blick übersehen werden können und das, was über sie noch zu sagen ist, um so leichter verstanden werden kann, habe ich die folgende Tafel eingefügt, welche man ohne Mühe beliebig weit nach unten und nach rechts fortsetzen kann. Die arabischen Zahlen am linken Rande der Tafel bezeichnen die Horizontalreihen (Zeilen) und zugleich die Anzahl der zu combinirenden Dinge, während die römischen Zahlen am oberen Rande die Vertikalreihen (Columnen) und zugleich die Classen der Combinationen angeben. Die erste Columne enthält die Reihe der Einheiten, die zweite die Reihe der natürlichen Zahlen beginnend mit einer Null, die dritte die Reihe der Dreieckszahlen beginnend mit zwei Nullen, und so fort.

Tafel der figurirten Zahlen.

Classe:	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
Anzahl der zu combinirenden Dinge. 1.	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4.	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5.	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0
6.	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0
7.	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0	0
8.	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0	0
9.	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0	0
10.	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0
11.	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	0
12.	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1

[88] Diese Tafel besitzt ganz ausgezeichnete und wunderbare Eigenschaften. Denn abgesehen von dem Geheimniss der Combinationen, welches wir schon an der Hand der früheren Tafel enthüllt haben, liegen, wie den mit der Mathematik eingehender Vertrauten bekannt ist, auch vorzügliche Geheimnisse der ganzen übrigen Mathematik in ihr verborgen. Wir werden einige dieser Eigenschaften hier besprechen und zwar vornehmlich jene, welche unserem Zwecke, strenge Beweise führen zu können, dienlich sind; die übrigen Eigenschaften können entweder aus diesen abgeleitet werden oder sind aus der

Construction der Tafel und aus der Entstehungsweise der figurirten Zahlen deutlich erkennbar.

Wunderbare Eigenschaften der Tafel der figurirten Zahlen.

1. Die zweite Columne beginnt mit einer Null, die dritte mit 2, die vierte mit 3, und allgemein die c^{te} Columne mit $c-1$ Nullen.

2. Die ersten, zweiten, dritten, ... von Null verschiedenen Glieder der Columnen, von links oben schräg nach rechts unten absteigend genommen, ergeben bez. die Zahlen der ersten, zweiten, dritten, ... Columne, d. h. die Reihe der Einheiten, der natürlichen Zahlen, der Dreieckszahlen, ...

3. Das auf die Eins folgende Glied jeder Columne ist gleich der Nummer derselben.

4. Jedes Glied der Tafel ist gleich der Summe aller früheren Glieder der vorhergehenden Columne.

5. Jedes beliebige Glied ist gleich der Summe des darüberstehenden [89] und des diesem links benachbarten Gliedes der unmittelbar vorangehenden Zeile.

6. Die Glieder jeder Horizontalreihe wachsen von 1 an bis zu einem gewissen grössten Werthe, von welchem aus sie in derselben Weise wieder abnehmen. Dieselbe Eigenschaft besitzen die Summen gleich weit genommener Vertikalreihen, da diese nach (4) gleich den Gliedern der folgenden Horizontalreihe sind.

7. Die Glieder irgend einer Zeile sind unter sich in der Weise gleich, dass das erste und das letzte von Null verschiedene Glied, das zweite und das vorletzte Glied, das dritte und das drittletzte Glied, und so fort (wenn die Zeile aus noch mehr von Null verschiedenen Gliedern besteht) mit einander übereinstimmen.

8. Nimmt man eine beliebige Anzahl aufeinanderfolgender Columnen (von der ersten an) und in gleicher Weise ebenso viele Zeilen, und summirt man dann die Glieder jeder Columne, so ist die erste Summe gleich der vorletzten, die zweite gleich der drittletzten, die dritte gleich der viertletzten, u. s. w. Denn es geben diese Summen die Glieder der folgenden Zeile mit Ausschluss des ersten Gliedes [vergl. Eigenschaft (4) und (7)]. Z. B.

1	0	0	0	0
1	1	0	0	0
1	2	1	0	0
1	3	3	1	0
1	4	6	4	1
5	10	10	5	1,

also die Glieder der sechsten Zeile, ausschliesslich des ersten.

9. Die Zeilen geben der Reihe nach die Coefficienten aller Potenzen der binomischen Entwickelung in der Weise an, dass die zweite Zeile die Coefficienten der ersten Potenz eines Binoms, die dritte Zeile die Coefficienten 1, 2, 1 des Quadrates, die vierte Zeile die Coefficienten 1, 3, 3, 1 des Cubus, u. s. w. angeben.

10. Die Summen der Glieder einer Zeile sind gleich den aufeinanderfolgenden Potenzen von 2; diese Summen von Anfang an wieder summirt geben die um 1 verminderten Potenzen von 2. Z. B. [**90**]

$$1 = 1, \quad 1 + 1 = 2, \quad 1 + 2 + 1 = 4 = 2^2,$$
$$1 = 2 - 1, \quad 1 + 2 = 2^2 - 1, \quad 1 + 2 + 4 = 2^3 - 1,$$
$$1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3, \ldots$$
$$1 + 2 + 4 + 8 = 2^4 - 1, \ldots$$

Daraus folgt wieder das im vorigen Kapitel über die Combinationen zu allen Classen Gesagte.

11. Dividirt man die Glieder einer beliebigen Columne (mit dem Gliede 1 oder der ihm vorhergehenden Null begonnen) bez. durch die Glieder der vorhergehenden Columne (mit 1 angefangen), so erhält man die Glieder einer arithmetischen Reihe, deren Differenz ein Bruch mit dem Zähler 1 und mit der Nummer (oder dem zweiten Gliede) der dividirenden Columne als Nenner ist. Z. B.

Divisor	Dividend	Quotient	Divisor	Dividend	Quotient
1	1	$\frac{3}{3}$	1	0	0
3	4	$\frac{4}{3}$	3	1	$\frac{1}{3}$
6	10	$\frac{5}{3}$	6	4	$\frac{2}{3}$
10	20	$\frac{6}{3}$	10	10	$\frac{3}{3}$
15	35	$\frac{7}{3}$	15	20	$\frac{4}{3}$

Diese Eigenschaft lässt sich, wenn nöthig, leicht aus der folgenden ableiten.

12. In einer beliebigen Columne verhält sich die Summe einer beliebigen Anzahl von Gliedern, angefangen mit den zugehörigen Nullen, zur Summe ebensovieler, dem letzten gleichen Glieder wie 1 zur Ordnungszahl der Columne; d. h. die Summe beliebig vieler natürlichen Zahlen, deren Columne mit einer Null beginnt, verhält sich zur Summe ebensovieler, der grössten gleichen Zahlen wie 1 zu 2; die Summe beliebig vieler Dreieckszahlen, welche mit zwei Nullen beginnen, verhält sich zur Summe ebensovieler, der letzten gleichen Zahlen wie 1 zu 3, u. s. w. Dasselbe gilt in irgend einer Columne für das Verhältniss zwischen der Summe einer beliebigen Anzahl von Gliedern, angefangen mit dem Gliede 1, und der Summe ebensovieler, dem auf das höchste folgenden gleichen Glieder. [91]

				0	10		
				0	10	1	56
0	3	1	5	0	10	4	56
1	3	2	5	1	10	10	56
2	3	3	5	4	10	20	56
3	3	4	5	10	10	35	56
6 : 12 = 1 : 2		10 : 20 = 1 : 2		15 : 60 = 1 : 4		70 : 280 = 1 : 4	

Da diese Eigenschaft der figurirten Zahlen von allen die wichtigste und zugleich die für unsere Zwecke nützlichste ist, so halte ich es für angebracht, hier das Verfahren zu entwickeln, durch welches ich eine wissenschaftliche und zugleich weittragende Begründung dieser Eigenschaft erhalte. Zu dem Zwecke schicke ich die folgenden Hülfssätze voraus.

Hülfssatz 1. Die Summe beliebig vieler Glieder der ersten Columne ist gleich der Summe ebenso vieler, dem letzten gleichen Glieder, oder beide Summen verhalten sich zu einander wie 1 zu 1.

Beweis. Da die Columne aus lauter Einheiten besteht, so ist die Summe beliebig vieler Glieder gleich der Summe ebensovieler Einheiten, d. h. sovieler Glieder, welche dem letzten Gliede gleich sind, als Glieder genommen worden sind.

Hülfssatz 2. Addirt man in irgend einer Columne soviele Glieder, angefangen mit den zugehörigen Nullen, zu einander als die Ordnungszahl der Columne angiebt, so verhält sich diese Summe zur Summe ebensovieler, dem letzten gleichen Glieder wie 1 zur Ordnungszahl der Columne.

Beweis. Nach der Eigenschaft (1) ist die Anzahl der Nullen in irgend einer Columne gleich ihrer um 1 verkleinerten Ordnungszahl; das auf die Nullen unmittelbar folgende Glied ist 1, nach Eigenschaft (2). [**92**] Die Summe aller hier zu nehmenden Glieder ist daher gleich 1, und die Summe ebenso vieler, dem letzten gleichen Glieder gleich der Ordnungszahl der Columne, woraus unmittelbar die Behauptung folgt.

Hülfssatz 3. Wenn in einer beliebigen Columne die Summe beliebig vieler Glieder, mit dem ersten angefangen, zur Summe ebensovieler Glieder, welche sämmtlich dem letzten gleich sind, stets dasselbe Verhältniss z. B. 1 zu r hat — wieviele Glieder auch genommen werden mögen[19] —, so verhält sich das vorletzte zum letzten der genommenen Glieder wie die Zahl dieser Glieder vermindert um r zur gleichen Zahl vermindert um 1.

Beweis. Es seien, mit dem ersten angefangen, beliebig viele Glieder a, b, c, d genommen, deren Anzahl gleich n sei, und es bezeichne c das vorletzte, d das letzte Glied. Nun ist stets

$$a + b + c = a + b + c + d - d,$$

d. h. nach der Voraussetzung:

$$\frac{c\,(n-1)}{r} = \frac{d\,n}{r} - d$$

und nach Fortschaffung des Nenners:

$$c\,(n-1) = d\,(n-r).$$

Hieraus folgt:

$$c : d = (n-r) : (n-1). \quad \text{W. z. b. w.}$$

Hülfssatz 4. Wenn in einer beliebigen Columne die Summe beliebig vieler Glieder, mit dem ersten angefangen, zur Summe ebenso vieler, dem letzten gleichen Glieder ein constantes Verhältniss 1 zu r hat, und wenn in der nächstfolgenden Columne die Summe einer bestimmten Anzahl von Gliedern, ebenfalls mit dem ersten angefangen, zur Summe ebenso vieler, dem letzten gleichen Glieder das constante Verhältniss 1 zu $r+1$ hat, so hat, wenn man noch das nächstfolgende Glied hinzunimmt, die Summe aller Glieder, vom ersten bis zu diesem neu hinzugenommenen einschliesslich, zur

Summe ebensovieler, dem hinzugefügten gleichen Glieder ebenfalls das Verhältniss 1 zu $r + 1$.

Beweis. Aus der letzteren Columne seien, mit dem ersten Gliede derselben angefangen, die Glieder e, f, g, h, auf welche i als nächstes Glied folgt, gegeben; aus der vorhergehenden Columne werde die gleiche Anzahl von Gliedern a, b, c, d genommen; in beiden Fällen sei die Anzahl der Glieder gleich n. Dann ist:

$$rh = r(a+b+c) \text{ [nach Eigenschaft (4)]}$$
$$= (n-1)c \text{ [nach Vor.]}$$
$$= (n-r)d \text{ [nach Hülfssatz 3]},$$

folglich

$$(n-r) : h = r : d = n : (a+b+c+d) \text{ [nach Vor.]}$$
$$= n : i \text{ [nach Eigenschaft (4)]}.$$

Daraus folgt weiter:

$$(n-r)i = nh = (r+1)(e+f+g+h) \text{ [nach Vor.]}$$

und mithin verhält sich

$$(n-r) : (r+1) = (e+f+g+h) : i.$$

Weiter ergiebt sich dann leicht:

$$(n+1) : (r+1) = (e+f+g+h+i) : i$$

oder

$$(e+f+g+h+i) : (n+1)i = 1 : (r+1). \quad \text{W. z. b. w.}$$

Als ich einst meinem Bruder diese Sätze mitgetheilt hatte, bemerkte er, dass der Beweis [**93**] in eleganter Weise abgekürzt werden könne, wenn man die letzten drei Hülfssätze in den folgenden einen Hülfssatz zusammenfasst:

Hülfssatz 5. Wenn in irgend einer Columne der Tafel der figurirten Zahlen die Summe beliebig vieler Glieder, mit dem ersten Gliede angefangen, zur Summe ebenso vieler, dem letzten gleichen Glieder sich wie 1 zu r verhält, so besteht in der nächstfolgenden Columne zwischen der Summe einer beliebigen Anzahl von Gliedern, ebenfalls mit dem ersten begonnen, und der Summe ebenso vieler, dem letzten gleichen Glieder das Verhältniss 1 zu $r + 1$.

$$n\begin{cases} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{cases} \left.\begin{matrix} 0 \\ g \\ h \\ i \\ l \\ p \\ q \end{matrix}\right\} n+1$$

Beweis. Die benachbarten Columnen seien $a, b, c, d, \ldots,$ und $0, g, h, i, \ldots$; die Anzahl der aus der ersten Columne genommenen Glieder sei gleich n und der aus der zweiten genommenen gleich $n+1$. Dann ist zunächst:

$$q+p+l+i+h+g+0$$

$$=\frac{nf}{r}+\frac{(n-1)e}{r}+\frac{(n-2)d}{r}+\frac{(n-3)c}{r}+\frac{(n-4)b}{r}+\frac{(n-5)a}{r}$$

[nach Vor. u. Eigenschaft (4)]

$$=\frac{n}{r}(f+e+d+c+b+a)-\frac{1}{r}(e+2d+3c+4b+5a)$$

$$=\frac{n}{r}q-\frac{1}{r}(p+l+i+h+g)$$

[nach Eigenschaft (4)].

Folglich ist:

$$rq+r(p+l+i+h+g)=nq-(p+l+i+h+g)$$

oder

$$(r+1)(p+l+i+h+g)=(n-r)q,$$

$$p+l+i+h+g=\frac{n-r}{r+1}q.$$

Auf beiden Seiten q hinzugefügt:

$$q+p+l+i+h+g=\frac{n+1}{r+1}q,$$

oder es verhält sich:

$$g+h+i+l+p+q:(n+1)q=1:(r+1).$$

W. z. b. w.

Hieraus folgt jetzt der

Hauptsatz. In der Tafel der figurirten Zahlen verhält sich die Summe beliebig vieler, mit den zugehörigen Nullen beginnenden Glieder zur Summe ebensovieler, dem letzten gleichen Glieder und ebenso die Summe beliebig vieler, mit dem Gliede 1 beginnenden Glieder zur Summe ebensovieler, dem nächstfolgenden gleichen Glieder wie 1 zu 1 für die Glieder der ersten, wie 1 zu 2 für die der zweiten, wie 1 zu 3 für die der dritten Columne u. s. w., allgemein für

die Glieder einer beliebigen Columne wie 1 zu ihrer Ordnungszahl.

Beweis. Für die erste Columne folgt die Richtigkeit der Behauptung aus dem ersten Hülfssatze, für die zweite, dritte, vierte, ... Columne aus den übrigen Hülfssätzen. Denn da die Summe beliebig vieler Glieder zur Summe ebensovieler, dem letzten gleichen Glieder in der ersten Columne sich verhält wie 1 zu 1, so ist auf Grund dieser Hülfssätze dieses Verhältniss für die zweite Columne gleich 1 zu $1 + 1 = 2$, [**94**] und mithin weiter für die dritte Columne gleich 1 zu $2 + 1 = 3$, für die vierte Columne gleich 1 zu $3 + 1 = 4$, allgemein für die c^{te} Columne gleich 1 zu c.

Da wir hier das Verhältniss $\frac{1}{r+1}$ des letzten Hülfssatzes durch das Verhältniss $\frac{1}{c}$ ersetzen, so ist $r = c - 1$, d. h. gleich der Anzahl der Nullen, mit welchen die c^{te} Columne beginnt [nach Eigenschaft (1)]. Da nun in dem letzten Hülfssatze gefunden wurde:

$$g + h + i + l + p = \frac{n-r}{r+1} q$$
$$= \frac{n-r}{c} q,$$

so folgt daraus, dass $0 + g + h + i + l + p$ (die Summe der ersten n Glieder) sich verhält zu $q\,(n - r)$, wo $n - r$ die Anzahl der Glieder ohne die Nullen ist, wie 1 zu c; d. h. die Summe beliebig vieler, mit 1 beginnenden Glieder der c^{ten} Columne verhält sich zur Summe ebenso vieler, dem nächstfolgenden gleichen Glieder wie 1 zu c.

Folgerung. Mit Hülfe dieser eben bewiesenen Eigenschaft lässt sich nun leicht sowohl ein beliebiges Glied als auch die Summe einer beliebigen Reihe finden. Es mögen aus mehreren aufeinanderfolgenden Columnen die ersten n Glieder genommen werden, sodass also aus der zweiten Columne $n - 1$, aus der dritten $n - 2$, aus der vierten $n - 3$ von Null verschiedene Glieder sich darunter befinden [nach Eigenschaft (1)]. Dann ist die Summe der ersten n Glieder aus der ersten Columne gleich $n \cdot 1 = \frac{n}{1}$; denselben Werth hat aber [nach Eigenschaft (4)] das $(n + 1)^{te}$ Glied der zweiten Columne.

Folglich ist [nach Eigenschaft (12)] die Summe der von 1 (einschl.) an genommenen $n-1$ Glieder der zweiten Columne gleich $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}=\binom{n}{2}$; denselben Werth hat aber auch das $(n+1)^{\text{te}}$ Glied der dritten Columne. Der dritte Theil dieses Werthes multiplicirt in $(n-2)$ — der Anzahl der Glieder in der dritten Columne von 1 an —, also $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}=\binom{n}{3}$ ist [wieder nach Eigenschaft (12)] gleich der Summe der aus der dritten Columne genommenen Glieder und auch gleich dem $(n+1)^{\text{ten}}$ Gliede der vierten Columne. In gleicher Weise ergiebt sich für die aus der vierten Columne genommenen Glieder und für das $(n+1)^{\text{te}}$ Glied der fünften Columne $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\binom{n}{4}$, und so fort. [95] Daraus aber folgt, dass die Summe der ersten n Glieder in der

$$\begin{array}{lccccccc} & 1. & 2. & 3. & 4. & 5. & \ldots & c.\ \text{Columne} \\ \text{gleich} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \binom{n}{4} & \binom{n}{5} & \ldots & \binom{n}{c}\ \text{ist.}\end{array}$$

Da jeder dieser Ausdrücke zugleich dem $(n+1)^{\text{ten}}$ Gliede der folgenden Columne gleich ist, so ergeben sich aus ihnen die Werthe der n^{ten} Glieder, wenn überall n durch $n-1$ ersetzt wird, und es ist daher der Werth des n^{ten} Gliedes in der

$$\begin{array}{lccccccc} & 1. & 2. & 3. & 4. & 5. & \ldots & c.\ \text{Columne} \\ \text{gleich} & \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & \binom{n-1}{3} & \binom{n-1}{4} & \ldots & \binom{n-1}{c-1}.\end{array}$$

Bemerkung. Viele haben sich schon, wie ich an dieser Stelle bemerken möchte, mit Betrachtungen über figurirte Zahlen beschäftigt (unter ihnen *Faulhaber* und *Remmelin* aus Ulm, *Wallis*, *Mercator* in seiner »Logarithmotechnia«, *Prestet* und andere [20])), aber ich weiss keinen, welcher einen allgemeinen und wissenschaftlichen Nachweis dieser Eigenschaft gegeben hat. *Wallis* hat in seiner »Arithmetica Infinitorum« als Grundlage seiner Methode die Verhältnisse, welche die Reihen, gebildet aus den Quadraten, den Cuben und den höheren Potenzen der natürlichen Zahlen, zur Reihe ebensovieler, dem grössten Gliede gleichen Zahlen haben, auf

inductivem Wege erforscht und ist von da nach Aufstellung von 176 Eigenschaften zur Betrachtung der Dreiecks-, Vierecks-zahlen und der weiteren figurirten Zahlen übergegangen; besser aber und auch der Natur des Gegenstandes angemessener wäre es gewesen, wenn er umgekehrt eine allgemeine und mit strengen Beweisen versehene Betrachtung der figurirten Zahlen vorausgeschickt hätte und dann erst zur Untersuchung der Potenzsummen der natürlichen Zahlen vorgeschritten wäre. Denn abgesehen davon, dass der Inductionsbeweis zu wenig wissenschaftlich ist und für jede einzelne Zahlenreihe besondere Mühe erforderlich macht, muss doch nach allgemein herrschender Ansicht immer das vorausgenommen werden, was seinem Wesen nach einfacher ist als das Uebrige und ihm vorangeht[21]). Dies gilt von den figurirten Zahlen gegenüber den Potenzen, [**96**] da jene durch Addition, diese durch Multiplication entstehen, und vornehmlich da die Reihen der figurirten Zahlen (mit den zugehörigen Nullen beginnend) genaue Theile von Reihen aus ebensovielen der letzten gleichen Zahlen sind (Vergl. S. 91, Nr. 12.); diese Eigenschaft kann für die Reihen von Potenzen (wenigstens bei einer endlichen Anzahl von Gliedern) nicht bestehen, wieviele Nullen auch vorangestellt werden mögen. Aus den bekannten Summen der figurirten Zahlen können leicht die Potenzsummen gefunden werden, wie ich dies im Folgenden kurz zeigen will.

Man nimmt die Reihe der natürlichen Zahlen von 1 bis n und bestimmt zunächst die Summe aller dieser Zahlen, dann die Summe aller ihrer Quadrate, ihrer Cuben, u. s. w. Da nun in der zweiten Columne das n^{te} Glied gleich $n - 1$ ist, so ist nach der eben vorausgeschickten Folgerung die Summe aller Glieder der zweiten Columne vom ersten bis zum n^{ten}, welche mit $S(n-1)$ bezeichnet sei, gleich $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$, also

$$S(n-1) = S(n) - S(1) = \frac{n^2 - n}{2}.$$

Da $S(1)$ gleich der Summe von n Einheiten, also $S(1) = n$ ist, so folgt

$$S(n) = \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n.$$

Das n^{te} Glied der dritten Columne ist nach der erwähnten

Folgerung gleich $\frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n^2-3n+2}{2}$, und die Summe aller Glieder von 1 bis n gleich $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$; folglich ist

$$S\left(\frac{n^2-3n+2}{2}\right) = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3},$$

und da

$$S\left(\frac{n^2-3n+2}{2}\right) = S\left(\frac{n^2}{2}\right) - S(\tfrac{3}{2}n) + S(1)$$
$$= \tfrac{1}{2}S(n^2) - \tfrac{3}{2}S(n) + S(1)$$

ist, so ergiebt sich schliesslich, wenn für $S(n)$ und $S(1)$ die Werthe eingesetzt werden:

$$\tfrac{1}{2}S(n^2) = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \tfrac{3}{2}\left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right) - n,$$
$$S(n^2) = \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n.$$

Das n^{te} Glied der vierten Columne ist gleich $\binom{n-1}{3} = \frac{1}{6}n^3 - n^2 + \frac{11}{6}n - 1$ und [97] die Summe der ersten n Glieder gleich $\binom{n}{4} = \frac{1}{6}n^4 - n^3 + \frac{11}{6}n^2 - n$; daher ist

$$S(\tfrac{1}{6}n^3 - n^2 + \tfrac{11}{6}n - 1) = \tfrac{1}{6}n^4 - n^3 + \tfrac{11}{6}n^2 - n$$

und

$$\tfrac{1}{6}S(n^3) = \tfrac{1}{6}n^4 - n^3 + \tfrac{11}{6}n^2 - n + S(n^2) - \tfrac{11}{6}S(n) + S(1).$$

Für $S(n^2)$, $S(n)$, $S(1)$ die gefundenen Werthe eingesetzt, erhält man für die Summe der ersten n Cuben:

$$S(n^3) = \tfrac{1}{4}n^4 + \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{1}{4}n^2.$$

So kann man schrittweise zu immer höheren Potenzen gelangen und mit leichter Mühe die folgende Tafel aufstellen:

Die Summe der Potenzen der natürlichen Zahlen.

$$S(n) = \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n,$$
$$S(n^2) = \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n,$$
$$S(n^3) = \tfrac{1}{4}n^4 + \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{1}{4}n^2,$$
$$S(n^4) = \tfrac{1}{5}n^5 + \tfrac{1}{2}n^4 + \tfrac{1}{3}n^3 - \tfrac{1}{30}n,$$
$$S(n^5) = \tfrac{1}{6}n^6 + \tfrac{1}{2}n^5 + \tfrac{5}{12}n^4 - \tfrac{1}{12}n^2,$$
$$S(n^6) = \tfrac{1}{7}n^7 + \tfrac{1}{2}n^6 + \tfrac{1}{2}n^5 - \tfrac{1}{6}n^3 + \tfrac{1}{42}n,$$
$$S(n^7) = \tfrac{1}{8}n^8 + \tfrac{1}{2}n^7 + \tfrac{7}{12}n^6 - \tfrac{7}{24}n^4 + \tfrac{1}{12}n^2,$$
$$S(n^8) = \tfrac{1}{9}n^9 + \tfrac{1}{2}n^8 + \tfrac{2}{3}n^7 - \tfrac{7}{15}n^5 + \tfrac{2}{9}n^3 - \tfrac{1}{30}n,$$
$$S(n^9) = \tfrac{1}{10}n^{10} + \tfrac{1}{2}n^9 + \tfrac{3}{4}n^8 - \tfrac{7}{10}n^6 + \tfrac{1}{2}n^4 - \tfrac{1}{12}n^2,$$
$$S(n^{10}) = \tfrac{1}{11}n^{11} + \tfrac{1}{2}n^{10} + \tfrac{5}{6}n^9 - 1\,n^7 + 1\,n^5 - \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{5}{66}n.$$

Wer aber diese Reihen in Bezug auf ihre Gesetzmässigkeit genauer betrachtet, kann auch ohne umständliche Rechnung die Tafel fortsetzen. Bezeichnet c den ganzzahligen Exponenten irgend einer Potenz, so ist

$$S(n^c) = \frac{1}{c+1}n^{c+1} + \tfrac{1}{2}n^c + \tfrac{1}{2}\binom{c}{1}An^{c-1}$$
$$+ \tfrac{1}{4}\binom{c}{3}Bn^{c-3} + \tfrac{1}{6}\binom{c}{5}Cn^{c-5} + \tfrac{1}{8}\binom{c}{7}Dn^{c-7} + \cdots,$$

wobei die Exponenten der Potenzen von n regelmässig fort um 2 abnehmen bis herab zu n oder n^2. Die Buchstaben A, B, C, D, ... bezeichnen der Reihe nach die Coefficienten von n in den Ausdrücken für $S(n^2)$, $S(n^4)$, $S(n^6)$ $S(n^8)$, ..., nämlich [98]

$$A = \tfrac{1}{6},\ B = -\tfrac{1}{30},\ C = \tfrac{1}{42},\ D = -\tfrac{1}{30},\ \ldots.$$

Diese Coefficienten aber haben die Eigenschaft, dass sie die übrigen Coefficienten, welche in dem Ausdrucke der betreffenden Potenzsumme auftreten, zur Einheit ergänzen; so haben wir z. B. den Werth von D gleich $-\tfrac{1}{30}$ angegeben, weil $\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3} - \tfrac{7}{15} + \tfrac{2}{9} + D = 1$ oder $\tfrac{31}{30} + D = 1$ sein muss. Mit Hülfe der obigen Tafel habe ich innerhalb einer halben Viertelstunde gefunden, dass die 10ten Potenzen der ersten tausend Zahlen die Summe liefern:

91 409 924 241 424 243 424 241 924 242 500.

Hieraus sieht man, wie unnütz die Mühe gewesen ist, welche *Ismaël Bullialdus*[22]) auf die Abfassung seiner sehr umfangreichen »Arithmetica Infinitorum« verwendet hat; denn er hat darin nichts weiter geleistet, als dass er nur die Potenzsummen für $c = 1$ bis $c = 6$ — einen Theil dessen, was wir auf einer einzigen Seite erreicht haben — mit ungeheurer Mühe berechnet hat.

Bevor ich dieses Kapitel schliesse, mag es mir vergönnt sein, noch in Kürze zu zeigen, wie mit Hülfe der Eigenschaften der figurirten Zahlenreihen noch gewisse andere ähnliche Reihen auf diese zurückgeführt und dann summirt werden können; derartige Reihen haben gleiche erste, zweite, dritte, ... Differenzen und können also durch fortgesetzte Addition einer Reihe, deren Glieder sämmtlich einander gleich sind, erzeugt werden. Z. B. sei D irgend eine Reihe mit lauter gleichen Gliedern, durch deren Summation entstehe die Reihe C; aus der Summation dieser letzteren entstehe die Reihe B, welche ihrerseits wieder durch Summation ihrer Glieder die Reihe A erzeuge, wobei die ersten Glieder d, c, b, a der vier Reihen willkürlich angenommen werden können.

D	C	B	A
d	c	b	a
d	$c + d$	$b + c$	$a + b$
d	$c + 2d$	$b + 2c + d$	$a + 2b + c$
d	$c + 3d$	$b + 3c + 3d$	$a + 3b + 3c + d$
d	$c + 4d$	$b + 4c + 6d$	$a + 4b + 6c + 4d$
d	$c + 5d$	$b + 5c + 10d$	$a + 5b + 10c + 10d$

Die Reihe A, deren erste Differenzen die Reihe B, deren zweite die Reihe C, deren dritte die Reihe D bilden, nenne ich der figurirten Zahlenreihe ähnlich. Nun ist offenbar die Reihe A zusammengesetzt aus den Reihen der Einheiten, der natürlichen Zahlen, der Dreieckszahlen, der Viereckszahlen multiplicirt bez. mit den ersten Gliedern der Differenzreihen a, b, c, d. Von diesen figurirten Zahlenreihen sind aber die allgemeinen Glieder und Summen bekannt nach dem Obigen [**99**], und folglich kann auch das allgemeine Glied und die Summe der Reihe A leicht hingeschrieben werden. Ist die Anzahl der Glieder n, so ist das n^{te} Glied der Reihe A gleich $a + \binom{n-1}{1} b + \binom{n-1}{2} c + \binom{n-1}{3} d$ und die Summe der ersten n Glieder gleich $\binom{n}{1} a + \binom{n}{2} b + \binom{n}{3} c + \binom{n}{4} d$.

Kapitel IV.

Anzahl der Combinationen (ohne Wiederholung) zu einer bestimmten Classe; Anzahl derselben, welche gewisse Dinge einzeln oder mit einander verbunden enthalten.

Aus dem vorigen Kapitel ergiebt sich, dass die Anzahl der Combinationen zu irgend einer Classe gleich der entsprechenden figurirten Zahlenreihe ist, von welcher so viele Glieder zu nehmen sind, als Dinge mit einander combinirt werden sollen. Da nun dort gezeigt worden ist, dass die Summe der ersten n Glieder der c^{ten} Columne gleich $\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-c+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots c}$ ist, so folgt, dass diese Zahl auch die Anzahl der Combinationen von n Dingen zu der Classe c angiebt.

Im Zähler und Nenner dieser Grösse bilden, wie man sieht, die Factoren arithmetische Reihen, und daher erhält man die folgende

[**100**] **Regel**

für die Bestimmung der Anzahl aller Combinationen ohne Wiederholung zu einer bestimmten Classe:

Man bilde sich zwei arithmetische Reihen, deren eine von der Anzahl der zu combinirenden Dinge an fällt, deren andere von 1 an steigt und welche beide die Differenz 1 und so viele Glieder haben, als die gegebene Classenzahl Einheiten hat. Der Quotient gebildet aus dem Producte der Glieder der ersten Reihe dividirt durch das Product der Glieder der zweiten Reihe liefert die gesuchte Anzahl von Combinationen.

Z. B. lassen sich 10 Dinge zu je vieren

$$\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{5040}{24}=210$$

mal combiniren[23]).

[**101**] Aus der obigen Regel lassen sich folgende Zusätze ableiten:

Zusatz 1. Wenn bei einer gegebenen Anzahl von Dingen

die Combinationsclasse allmählich bis zur halben Anzahl der Dinge anwächst, so nimmt auch die Anzahl der Combinationen zu; wächst aber die Classenzahl dann noch weiter, so nimmt sie wieder ab. So giebt es bei 8 Dingen mehr Binionen als Unionen. mehr Ternionen als Binionen und mehr Quaternionen als Ternionen, aber mehr Quaternionen als Quinionen, mehr Quinionen als Senionen u. s. w. [Vergl. Eigenschaft (6) der Tafel der figurirten Zahlen]. Denn die Anzahl der Unionen bei acht Dingen ist $\frac{8}{1}$, und diese liefert durch fortgesetzte Multiplication mit $\frac{7}{2}, \frac{6}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \frac{3}{6}, \ldots$ allmählich [**102**] die Anzahl der Binionen, Ternionen, u. s. w., nämlich $\frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2}, \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \ldots$. Da nun die ersten Brüche $\frac{7}{2}, \frac{6}{3}, \frac{5}{4}$ grösser als 1, die übrigen $\frac{4}{5}, \frac{3}{6}, \cdots$ aber kleiner als 1 sind, so folgt, dass die Combinationszahlen bis zu einem gewissen Werthe der Classenzahl allmählich wachsen und dann wieder abnehmen. Dass sie aber wachsen, bis die Classenzahl gleich der halben Anzahl der Dinge ist, geht daraus hervor, dass in der Reihe der Brüche $\frac{8}{1}, \frac{7}{2}, \frac{6}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$ (deren erster die Anzahl der Dinge als Zähler und 1 als Nenner hat) Zähler und Nenner um 2 Einheiten einander von Bruch zu Bruch näher kommen und also nach so vielen Brüchen einander gleich werden, als die Hälfte von der Anzahl der gegebenen Dinge beträgt. Geht man noch weiter, so werden die Nenner grösser als die Zähler, und das Intervall zwischen beiden nimmt beständig zu.

Zusatz 2. Zu zwei Classen, deren Summe gleich der Anzahl der gegebenen Dinge ist — und welche wir **parallele Classen** nennen — giebt es gleich viele Combinationen. Da $8 = 7 + 1 = 6 + 2 = 5 + 3$ ist, so giebt es ebenso viele Unionen wie Septenionen, ebensoviele Binionen wie Senionen, ebensoviele Ternionen wie Quinionen. [Vergl. die Eigenschaften (6) und (7) der Tafel der fig. Z.] So oft nämlich z. B. von acht Dingen je zwei genommen werden können, ebenso oft bleiben immer je sechs übrig; es können also umgekehrt ebenso oft je sechs Dinge genommen werden, indem man die vorher übriggebliebenen jetzt nimmt und die vorher genommenen jetzt übrig lässt. Nach der Regel ist die Anzahl der Binionen bei 8 Dingen gleich $\frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2}$ und der Senionen gleich $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$; es unterscheiden sich beide Zahlen aber nicht von einander, da der Bruch $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 1$ ist.

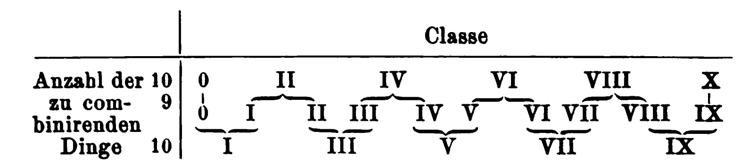
[**103**] Zusatz 3. Die Anzahl der Combinationen ist bei einer geraden Anzahl von Dingen am grössten zu der Classe, welche gleich der Hälfte dieser letzteren Zahl ist, und bei einer ungeraden Anzahl von Dingen am grössten zu den beiden benachbarten Classen, deren Summe gleich der Anzahl der Dinge ist; es folgt dies aus den beiden ersten Zusätzen. [Dies wird von *Bernoulli* ausführlich für 8 und 9 Dinge gezeigt].

Zusatz 4. Die Anzahl der Combinationen von beliebig vielen Dingen zu irgend einer Classe oder zu deren paralleler Classe ist gleich der Anzahl der Permutationen von ebenso vielen Dingen, welche zu nur zwei Arten in der Weise gehören, dass die Dinge beider Arten an Zahl mit den parallelen Classenzahlen übereinstimmen. Es giebt also bei 7 Dingen ebenso viele Ternionen und Quaternionen, als es Permutationen von 7 Dingen giebt, von denen 3 und 4 unter einander gleich sind; denn die Zahl der Ternionen ist $\frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$ gleich der Anzahl der genannten Permutationen.

Zusatz 5. Für eine beliebige Anzahl von Dingen ist die Anzahl der Combinationen zu einer gegebenen Classe gleich der Summe der Combinationen [**104**] einer um 1 kleineren Anzahl von Dingen zu derselben und der um 1 niedigeren Classe. Z. B. giebt es bei 10 Dingen ebenso viele Quaternionen als Quaternionen und Ternionen von 9 Dingen gebildet werden können: $\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{(6+4)\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \binom{9}{4} + \binom{9}{3}$. Dies lässt sich auch so begründen: A sei eines der gegebenen 10 Dinge; dann giebt es offenbar soviele Quaternionen, in denen A nicht vorkommt, als es Quaternionen von den übrigen 9 Dingen giebt, und soviele Quaternionen, welche A enthalten, als es Ternionen von den übrigen 9 Dingen giebt (denn diesen letzteren braucht man nur A hinzuzufügen, um die ersteren zu erhalten); beide Sorten von Quaternionen erschöpfen aber sämmtliche Quaternionen, welche man aus 10 Dingen bilden kann. [Vergl. die Eigenschaften (4) und (5) der Tafel der fig. Z.]

Zusatz 6. Die Anzahl der Combinationen zu allen geraden Classen (einschliesslich der 0ten) ist gleich der Anzahl der Combinationen zu allen ungeraden Classen, und folglich ist jede dieser beiden Zahlen gleich der Hälfte der Anzahl aller Combinationen (ebenfalls einschliesslich der

Nullion). Da nach der Regel im Kapitel II die letztere gleich 2^n ist, so folgt für jede der ersteren Zahlen 2^{n-1}. Dies ist schon am Schlusse des genannten Kapitels gezeigt, es lässt sich aber auch mit Hülfe des vorigen Zusatzes in folgender Weise ableiten. Z. B. giebt es bei 9 Dingen nur eine Combination zur 9ten Classe, gleichwie es bei 10 Dingen nur eine zur 10ten Classe giebt; in beiden Fällen giebt es nur eine Nullion. Ferner sind die Summen gebildet aus je zwei Combinationszahlen, welche den Classen 1 und 2, 3 und 4, 5 und 6, 7 und 8 bei 9 Dingen entsprechen, bez. gleich den den Combinationszahlen für die Classen 2, 4, 6, 8 bei 10 Dingen [nach Zusatz (5)]. Die Anzahl aller Combinationen von 9 Dingen ist also gleich der Anzahl der Combinationen zu geraden Classen von 10 Dingen. [105] Auf ähnliche Weise ergiebt sich, dass die Anzahl aller Combinationen von 9 Dingen auch gleich der Anzahl der Combinationen zu ungeraden Classen von 10 Dingen ist, wie das folgende Schema veranschaulicht:



Es bleiben uns hier noch einige nützliche Fragen zu lösen übrig, welche in Bezug auf die Combinationen gestellt werden können. Z. B.: In wievielen Combinationen finden sich ein oder mehrere Dinge entweder in Verbindung mit einander oder einzeln vor. Da sich unendlich viele derartige Fragen aufwerfen lassen, so unternehmen wir es, alle auf ein einziges Problem zurückzuführen, welches wir allgemein so aussprechen: »Für eine gegebene Anzahl von zu combinirenden Dingen und zu einer gegebenen Combinationsclasse soll gefunden werden, in wievielen Combinationen aus einer beliebigen Anzahl von bezeichneten Dingen einige, welche auch ihrerseits vorgeschrieben und bestimmt sind, vorkommen und die übrigen bezeichneten Dinge nicht vorkommen«. Also von n gegebenen Dingen, welche zur c^{ten} Classe combinirt werden sollen, werden einige mit A, B, C, . . ., D, E, . . ., deren Anzahl gleich m ist, bezeichnet, wo m grösser oder kleiner als c sein kann; es wird gefragt, in wievielen Combinationen einige der bezeichneten Dinge A, B, C, . . ., deren Anzahl gleich

b ist, zusammen vorkommen und die übrigen D, E, . . . nicht. Die Lösung des so allgemein gefassten Problems ist, wie ich behaupte, nicht weniger leicht zu geben als die irgend eines speciellen Falles, und die Anzahl der Combinationen von $n - m$ Dingen zu der Classe $c - b$, also $\binom{n-m}{c-b}$ liefert die gesuchte Zahl. Denn da die Anzahl aller Dinge gleich n und der bezeichneten von ihnen gleich m ist, so ist die Anzahl der übrigen, nicht bezeichneten gleich $n - m$; combinirt man diese $n - m$ Dinge [**106**] zu der Classe $c - b$, so enthalten die Combinationen keines der bezeichneten Dinge. Fügt man nun jeder dieser Combinationen die b Dinge A, B, C, . . . an, so wird die Classe aller dieser Combinationen gleich c, und jede einzelne derselben enthält von den bezeichneten Dingen nur A, B, C, . . ., mit Ausschluss der übrigen D, E, . . ., wie die Aufgabe verlangte — Wenn aber nur verlangt ist, dass von den m bezeichneten Dingen b Dinge in den Combinationen vorkommen, ohne dass diese b Dinge bestimmt sind, so vervielfacht sich offenbar die obige Zahl so oft, als aus den bezeichneten m Dingen Combinationen zur b^{ten} Classe gebildet werden können, d. h. $\binom{m}{b}$ mal. Die gesuchte Anzahl von Combinationen ist dann $\binom{m}{b}\binom{n-m}{c-b}$.

Ist $n - m < c - b$, so giebt es keine Combination, welche die vorgeschriebene Bedingung erfüllt. Wir fügen hier noch folgende besondere Fälle an:

1. In wievielen Combinationen kommt ein bestimmtes Ding vor? Da hier ein einziges Ding bezeichnet ist, so ist $m = b = 1$; die gesuchte Anzahl von Combinationen ist also $\binom{n-m}{c-b} = \binom{n-1}{c-1}$, welche sich zur Zahl aller Combinationen von n Dingen zur c^{ten} Classe verhält wie c zu n, d. h. wie die Classenzahl zu der Anzahl der Dinge.

2. Es werden zwei Dinge A und B bezeichnet, und man soll die Anzahl der Combinationen bestimmen, in welchen sich A, aber nicht B findet. Weil hier $m = 2$, $b = 1$ ist, so hat die gesuchte Anzahl den Werth $\binom{n-2}{c-1}$; das Doppelte dieser

Zahl aber giebt an, in wievielen Combinationen entweder A oder B (nicht beide gleichzeitig) vorkommen.

3. Fragt man weiter, [107] in wievielen Combinationen A und B zusammen vorkommen, so ist, weil $m = b = 2$ ist, die gesuchte Zahl gleich $\binom{n-2}{c-2}$.

4. Wird aber gefragt, in wievielen Combinationen keines der beiden bezeichneten Dinge sich findet, so ergiebt sich, da $m = 2$, $b = 0$ ist, für die gesuchte Zahl $\binom{n-2}{c}$.

5. Wenn drei Dinge A, B, C bezeichnet sind und gefragt wird, in wievielen Combinationen A und B ohne C vorkommen, so ist $m = 3$, $b = 2$ und die gesuchte Anzahl gleich $\binom{n-3}{c-2}$. Da von den drei Dingen dreimal je zwei genommen werden können, so giebt $3\binom{n-3}{c-2}$ die Anzahl der Combinationen an, in welchen zwei beliebige von den drei bezeichneten Dingen (ohne das dritte) vorkommen. Und so fort in anderen Fällen.

Anhang. Nachdem wir nun das Wesen der figurirten Zahlen und ihren Nutzen für die Combinationslehre auseinandergesetzt haben, unterbrechen wir hier unsere Betrachtungen, — eingedenk des Versprechens, welches wir am Ende der Aufgabe VII im ersten Theile gegeben haben —, bis wir hier noch gezeigt haben, auf welche Weise die Hoffnungen zweier Spieler, welchen noch eine unbestimmte Zahl von Spielen fehlt, allgemein gefunden werden können. Diese Frage, mit welcher sich auch *Pascal* einst beschäftigt hat, lässt sich auf zwei Arten beantworten. Die eine verstecktere Art ist aus der Construction der am genannten Orte gegebenen Tafel und aus der Betrachtung der Reihe, welche die Zahlen der Tafel bilden, gefunden worden. *Pascal* schreibt in einem Briefe an *Fermat*, wie man in *Fermat*'s zu Toulouse 1679 gedruckten Werken (Varia opera mathematica) Seite 180 lesen kann, dass er die Antwort auf die Frage nie habe finden können. Die andere Art ist näherliegend und leichter zu finden, da sie sich aus der Combinationslehre unmittelbar ergiebt, und es scheint, dass *Huygens* diese bei seiner Lösung der Aufgabe benutzt hat.

Erste Art der Lösung. Dem Spieler A fehlen noch n Spiele und seinem Gegner B noch m Spiele, um zu

gewinnen; wie gross ist die Hoffnung jedes Spielers? Es wird also nach der Zahl gefragt, welche in dem n^{ten} Felde der m^{ten} Columne jener oben genannten Tafel steht. Ueber jede Columne schreiben wir noch so viele Glieder der geometrischen Reihe mit dem Anfangsgliede 1 und dem Quotienten 2, als die Ordnungszahl der Columne Einheiten hat, also ein Glied über die erste, zwei Glieder über die zweite Columne, und so fort, in folgender Weise:

[108]

$m =$	1	2	3	4	5	
					1	
				1	2	
			1	2	4	m
		1	2	4	8	
	1	2	4	8	16	
$n = 1$	1 : 2	3 : 4	7 : 8	15 : 16	31 : 32	
2	1 : 4	4 : 8	11 : 16	26 : 32	57 : 64	n
3	1 : 8	5 : 16	16 : 32	42 : 64	99 : 128	
4	1 : 16	6 : 32	22 : 64	64 : 128	163 : 256	

Die an die Spitze jeder Columne geschriebenen Glieder der geometrischen Reihe mit dem Exponenten 2 finden ihre unmittelbare Fortsetzung in den Nennern der in dieser Columne stehenden Brüche, sodass der Nenner in dem n^{ten} Felde der m^{ten} Columne gleich dem $(m + n)^{\text{ten}}$ Gliede der genannten geometrischen Reihe, also gleich 2^{m+n-1} ist. Jeder Zähler aber ist, wie früher (S. 18) angegeben worden ist, gleich der Summe zweier anderen Zähler, deren einer unmittelbar über ihm, deren anderer links neben ihm steht. Daraus folgt, dass der Zähler in dem n^{ten} Felde einer beliebigen Columne gleich ist der Summe aller n Zähler der vorhergehenden Columne, der an der Spitze der letzteren stehenden Potenzen von 2 und der Einheit. Weiter folgt aber hieraus, dass die Reihe der Zähler in der zweiten Columne (einschliesslich der Potenzen von 2 an ihrer Spitze) in zwei andere Reihen zerlegt werden kann, die der dritten Columne in drei, und allgemein die der m^{ten} Columne in m andere Reihen, deren erste stets die Reihe der Einheiten, deren zweite die Reihe der natürlichen Zahlen (mit einer Null), deren dritte die Reihe der Dreieckszahlen (mit zwei Nullen), u. s. w. ist:

[109]

$m=$	1	2	3	4	5	
					$1+0+0+0+0$	[illegible]
				$1+0+0+0$	$1+1+0+0+0$	
			$1+0+0$	$1+1+0+0$	$1+2+1+0+0$	
		$1+0$	$1+1+0$	$1+2+1+0$	$1+3+3+1+0$	
	1	$1+1$	$1+2+1$	$1+3+3+1$	$1+4+6+4+1$	
$n=1$	1	$1+2$	$1+3+3$	$1+4+6+4$	$1+5+10+10+5$	n
2	1	$1+3$	$1+4+6$	$1+5+10+10$	$1+6+15+20+15$	
3	1	$1+4$	$1+5+10$	$1+6+15+20$	$1+7+21+35+35$	
4	1	$1+5$	$1+6+15$	$1+7+21+35$	$1+8+28+56+70$	

Da nun nach der im Kapitel III gezogenen Folgerung das $(m+n)^{\text{te}}$ Glied in der Reihe der Einheiten 1, der natürlichen Zahlen $\binom{m+n-1}{1}$, der Dreieckszahlen $\binom{m+n-1}{2}, \ldots,$ der m-Eckszahlen $\binom{m+n-1}{m-1}$ ist, so folgt, dass der Zähler des in dem n^{ten} Felde der m^{ten} Columne stehenden Bruches den Werth hat:

$$1+\binom{m+n-1}{1}+\binom{m+n-1}{2}+\cdots+\binom{m+n-1}{m-1}.$$

Die einzelnen Glieder dieser Summe geben aber die Anzahl aller Nullionen, Unionen, Binionen, Ternionen, u. s. w. an, welche aus $m+n-1$ Dingen gebildet werden können, und daher ist der genannte Zähler gleich der Summe der Combinationszahlen von $m+n-1$ Dingen zu allen Classen von Null bis $m-1$ einschl. Dividiren wir diese Summe noch durch 2^{m+n-1}, so haben wir die gesuchte Hoffnung des Spielers A oder, was dasselbe ist, den ihm gebührenden Theil des Einsatzes 1 gefunden, wenn ihm noch n und seinem Gegner B noch m Spiele fehlen.

Bemerkung. Ist $m=n+1$, fehlt also dem B nur ein Spiel mehr als dem A, so ist der A gebührende Theil des Einsatzes 1 gleich [110] der Summe der Combinationszahlen von $2n$ Dingen zu allen Exponenten von Null bis n (einschl.), dividirt durch 2^{2n} (der Anzahl aller Combinationen von $2n$ Dingen). Da nun die Summe der Combinationszahlen von $2n$ Dingen zu allen Classen von Null bis $n-1$

(einschl.), vermehrt um die halbe Anzahl der Combinationen zur n^{ten} Classe gleich der halben Anzahl aller Combinationen ist (vergl. Zusatz 2 und 3 dieses Cap.), so folgt, dass der *A* gebührende Theil des Einsatzes 1 gleich $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n}$ ist. *A* hat den Beitrag $\frac{1}{2}$ zu dem Einsatze geleistet, folglich ist sein wirklicher Gewinn gleich $\frac{1}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n}$ oder gleich dem $\left[\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\right]^{\text{ten}}$ Theile des Einsatzes $\frac{1}{2}$ von *B*. Ist z. B. $m = 8$, $n = 9$, so gehört dem *A* von dem Einsatze des *B* der $\left[\frac{1}{2^{16}}\binom{16}{8}\right]^{\text{te}}$ Theil, welcher Bruchtheil auch so geschrieben werden kann: $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13\cdot 15}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14\cdot 16}$. Der Bruch entsteht also durch Division des Productes der ersten acht ungeraden Zahlen durch das Product der ersten acht geraden Zahlen. In dieser Form gab *Pascal* die Lösung dieses speciellen Falles, auf welche er sehr stolz war[24]).

Zweite Art der Lösung. Die andere Lösungsart der gestellten Frage ergiebt sich unmittelbar aus der Betrachtung der Combinationen. Wir bedenken, dass im ungünstigsten Falle $m + n - 1$ Spiele noch erforderlich sind, damit einer von beiden Spielern (und nur einer) die ihm noch fehlenden Spiele und damit den Einsatz gewinnt; denn wenn $m + n - 2$ Spiele bereits gemacht sind, von denen der eine Spieler $m - 1$, der andere $n - 1$ gewonnen hat, so fehlt jedem nur noch ein Spiel, und das nächste muss einem von beiden Spielern den Sieg bringen. Es kann natürlich schon bei einer geringeren Anzahl von Spielen einer der beiden Spieler gewinnen; die Spiele, welche in diesem Falle [111] an der Zahl $m + n - 1$ noch fehlen, reichen aber, auch wenn sie gemacht werden, nicht zum Siege des Gegners hin und können daher keineswegs von vornherein das Spiel zu seinen Gunsten entscheiden. Wir können daher annehmen, dass noch $m + n - 1$ Spiele gemacht werden, und bedenken, dass *A* den Einsatz erhält, sobald *B* entweder kein Spiel oder ein Spiel oder 2, 3, ..., $m - 1$ Spiele von diesen gewinnt und nicht mehr. Dies kann aber so oft eintreten, als es Combinationen von $m + n - 1$ Dingen zu den Classen 0, 1, 2, ..., $m - 1$ zusammen giebt. Ebensoviele Fälle hat *A* für Gewinn, die übrigen für

Verlust. Ueberhaupt möglich sind aber 2^{m+n-1} Fälle (nämlich soviele, als es Combinationen von $m+n-1$ Dingen zu allen Classen zusammen giebt), und folglich hat nach Satz III Zusatz 1 des ersten Theiles A die Hoffnung:

$$\frac{1+\binom{m+n-1}{1}+\binom{m+n-1}{2}+\cdots+\binom{m+n-1}{m-1}}{2^{m+n-1}},$$

wie oben gefunden worden ist.

Bemerkung. Wenn die Zahlen m und n wenig von einander verschieden sind, so ist es vortheilhafter (nach Theil I, Satz III, Zusatz 5), die Hoffnung des A in Bezug auf den Einsatz des andern Spielers, als in Bezug auf den ganzen Einsatz zu berechnen. Ist z. B. $m=n+1$, also $m+n-1=2n$, so hat A so viele Fälle für Gewinn, als Combinationen zu den Classen 0 bis n (einschl.) vorhanden sind, und so viele Fälle für Verlust, als es Combinationen zu höheren Classen giebt; die Anzahl der ersteren Fälle ist um $\binom{2n}{n}$ grösser als die der letzteren [vergl. Zusatz 2 dieses Kap.], und folglich ist die Hoffnung des A in Bezug auf den Einsatz seines Gegners B gleich $\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$, wie schon vorhin gefunden worden ist. Wenn B noch n Spiele fehlen, so verhält sich der wirkliche Gewinn des A im Falle $m=n+1$ zu seinem Gewinn [112] im Falle $m=n+2$ wie $n+1$ zu $2n+1$, und sein Gewinn im Falle $m=n+2$ zu dem im Falle $m=n+3$ wie $2n+4$ zu $3n+4$.

Denen zu Liebe, welche Freude an Zahlenspeculationen haben, füge ich hier noch zwei Eigenschaften der bei der Aufgabe VII im ersten Theile gegebenen Tafel hinzu[25]. Die erste besteht darin, dass die Zähler der dritten Columne die Dreieckszahlen 3, 6, 10, 15, 21, . . . vermehrt um die Zähler der zweiten Columne 4, 5, 6, 7, 8, . . . sind; dass die Zähler der vierten Columne die Viereckszahlen, 4, 10, 20, 35, 56, . . . vermehrt um die Zähler der dritten Columne 11, 16, 22, 29,37, . . . sind; dass die Zähler der fünften Columne die Fünfeckszahlen 5, 15, 35, 70, 126, . . . vermehrt um die Zähler der vierten Columne 26, 42, 64, 93, 130, . . . sind; und so fort, wobei man stets mit den zweiten Gliedern beginnen muss. Die andere Eigenschaft besteht darin, dass die Zähler der dritten Columne die

Dreieckszahlen 6, 10, 15, 21, . . . vermehrt um die Zähler der ersten Columne 1, 1, 1, 1, . . . sind; dass die Zähler der vierten Columne die Viereckszahlen 10, 20, 35, 56, . . . vermehrt um die Zähler der zweiten Columne 5, 6, 7, 8, . . . sind; dass die Zähler der fünften Columne die Fünfeckszahlen 15, 35, 70, 126, . . . vermehrt um die Zähler der dritten Columne 16, 22, 29, 37, . . . sind; und so fort, wobei man stets mit den dritten Gliedern beginnen muss.

Kapitel V.

Anzahl der Combinationen mit Wiederholung.

Bei den Combinationen der vorhergehenden Kapitel setzten wir voraus, dass kein Ding mit sich selbst verbunden werden durfte, also nicht mehr als einmal in derselben Combination vorkommen konnte. Jetzt fügen wir aber die Bedingung hinzu, dass

> jedes Ding auch mit sich selbst verbunden werden soll, also in derselben Combination mehrmals wiederkehren kann.

Es sollen in dieser Weise die Buchstaben a, b, c, d, . . . mit einander combinirt werden. [113] Es mögen ebenso viele Zeilen, als Buchstaben gegeben sind, gebildet und die Zeilen mit den einzelnen Buchstaben oder Unionen begonnen werden, wie es in dem Kapitel II geschah.

Um die Binionen jeder Zeile zu finden, muss der sie beginnende Buchstabe nicht nur, wie früher, mit allen vorhergehenden Buchstaben, sondern auch mit sich selbst combinirt werden; man erhält also schon in der ersten Zeile eine Binion aa, in der zweiten zwei Binionen ab, bb, in der dritten drei ac, bc, cc, in der vierten vier ad, bd, cd, dd, u. s. w.

Ebenso muss man bei der Bildung der Ternionen jeden einzelnen Buchstaben nicht nur mit den Binionen aller vorhergehenden Zeilen, sondern auch mit denen der eigenen Zeile verbinden; auf diese Weise entstehen in der ersten Zeile die Ternion aaa, in der zweiten die drei Ternionen aab, abb, bbb, in der dritten die sechs Ternionen aac, abc, bbc, acc, bcc, ccc, u. s. w.

Auf gleiche Weise muss man bei der Bildung der Combinationen zu höheren Classen verfahren. Man ist dann

sicher, keine Combination ausgelassen zu haben, und erhält so das Schema:

a, *aa*, *aaa*;
b, *ab*, *bb*, *aab*, *abb*, *bbb*;
c, *ac*, *bc*, *cc*, *aac*, *abc*, *bbc*, *acc*, *bcc*, *ccc*;
d, *ad*, *bd*, *cd*, *dd*, *aad*, *abd*, *bbd*, *acd*, *bcd*, *ccd*, *add*, *bdd*, *cdd*, *ddd*;
. . . .

Hieraus aber kann man nun leicht schliessen, dass die Zahlen der Unionen jeder Zeile die Reihe der Einheiten, die Zahlen der Binionen die Reihe der natürlichen Zahlen, die Zahlen der Ternionen die Reihe der Dreieckszahlen und die Zahlen der Combinationen zu höheren Classen Reihen von figurirten Zahlen höherer Art bilden, wie bei den Combinationen ohne Wiederholung in den vorhergehenden Kapiteln; es ist nur der Unterschied, dass hier die Reihen der figurirten Zahlen sofort mit dem Gliede 1, dort mit Nullen beginnen. Bringt man diese Zahlen in eine Tafel, so erhält man die folgende Anordnung:

[114] *Combinationstafel.*

Anzahl der zu combinirenden Dinge.	Classe der Combinationen											
	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	[illegible]
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78
4	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364
5	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	1365
6	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003	4368
7	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008	12376
8	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448	31824
9	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758	75582
10	1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378	167960
11	1	11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378	184756	352716
12	1	12	78	364	1365	4368	12376	31824	75582	167960	352716	705432

Bei dieser Anordnung der Tafel sind hauptsächlich zwei Eigenschaften zu bemerken: 1. Die Zeilen stimmen mit den entsprechenden Columnen überein, also die 1te Zeile mit der 1ten Columne, die 2te mit der 2ten, u. s. w. 2. Nimmt man

zwei benachbarte Reihen — Zeilen oder Columnen — [115] mit einer gleichen Anzahl von Gliedern, so ist die Summe der Glieder der früheren Reihe gleich dem letzten Gliede der folgenden Reihe.

Hieraus kann man leicht die Summe der Glieder einer beliebigen Reihe und mithin auch die Anzahl der Combinationen mit Wiederholung zu einer beliebigen Classe finden. Ist die Anzahl der zu combinirenden Dinge gleich n, so ist die Anzahl aller Unionen gleich der Summe der ersten n Glieder in der ersten Reihe, also gleich dem n^{ten} Gliede der zweiten Reihe, d. h. gleich n.

Der zweiten Reihe denke man sich eine Null vorgeschrieben, damit die Zahl ihrer Glieder gleich $n+1$ werde. Multiplicirt man die Hälfte dieser Zahl mit dem letzten Gliede n, so ist das Product $\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}$ gleich der Summe der Binionen oder der Glieder der zweiten Reihe [nach der Eigenschaft (12) des Kap. III] und auch gleich dem n^{ten} Gliede der dritten Reihe [nach Eigenschaft (2) dieses Kap.].

Denkt man sich der dritten Reihe zwei Nullen vorgeschrieben, so ist die Anzahl ihrer Glieder gleich $n+2$. Multiplicirt man den dritten Theil dieser Zahl mit dem eben gefundenen letzten Gliede $\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}$ der zweiten Reihe, so giebt das Product $\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ die Anzahl aller Ternionen oder die Summe der Glieder der dritten Reihe und zugleich auch das letzte Glied der vierten Reihe.

Auf gleiche Weise findet man die Summe der ersten n Glieder der vierten Reihe oder die Anzahl der Quaternionen gleich $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$, die Anzahl der Quinionen gleich $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$ und allgemein die Summe der ersten n Glieder der c^{ten} Reihe oder die Anzahl der Combinationen mit Wiederholung zur c^{ten} Classe gleich $\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+c-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots c} = \binom{n+c-1}{c}$.

Ist $c > n$, so kann man Zähler und Nenner des vorstehenden Bruches durch $n(n+1)(n+2)\cdots c$ kürzen und erhält dann

$\frac{(c+1)(c+2)\cdots(c+n-1)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n-1)} = \binom{c+n-1}{n-1}$. Da dieser Bruch zugleich die Summe der ersten $c+1$ Glieder in der $(n-1)^{\text{ten}}$ Reihe angiebt, so folgt, dass die Summe der ersten n Glieder in der c^{ten} Reihe gleich der Summe der ersten $c+1$ Glieder in der $(n-1)^{\text{ten}}$ Reihe ist, wodurch eine weitere schöne Eigenschaft der obigen Tafel gefunden worden ist. Es ergiebt sich mithin folgende

[116] **Regel**

für die Bestimmung der Anzahl aller Combinationen mit Wiederholung zu einer bestimmten Classe:

Man bilde zwei steigende arithmetische Reihen, deren eine mit der Anzahl der zu combinirenden Dinge und deren andere mit 1 beginnt, welche beide die Differenz 1 und soviele Glieder haben, als die Classenzahl Einheiten hat. Das Product aus den Gliedern der ersten Reihe dividirt durch das Product aus den Gliedern der letzten Reihe giebt die gesuchte Anzahl.

Z. B. die Anzahl der Quaternionen mit Wiederholung für 10 Dinge ist gleich $\frac{10\cdot 11\cdot 12\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 715$.

Bemerkung. Ist der Exponent grösser als die Anzahl der gegebenen Dinge, was hier sehr wohl möglich ist, so ist es vortheilhafter die erste Reihe mit der Zahl zu beginnen, welche um 1 grösser als der Exponent ist, und soviele Glieder in jeder Progression zu nehmen als die um 1 verminderte Anzahl von Dingen angiebt. Z. B. die Anzahl der Combinationen m. W. von 4 Dingen zur 10ten Classe ist gleich $\frac{11\cdot 12\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3} = 286$.

Aber auch die Anzahl der Combinationen m. W. zu allen Classen, von 1 an wachsend bis zu einer beliebigen Zahl, d. h. die Summe ebensovieler Columnen, kann man mit gleicher Leichtigkeit finden. Da z. B. die ersten 10 Glieder der ersten 4 Columnen identisch sind mit den ersten 4 Gliedern der 10 ersten Zeilen, und da ferner die Summen dieser Glieder bez. gleich sind dem zweiten bis elften Gliede der vierten Columne [nach Eigenschaft (2)], so ist klar, dass

uch die ersten 10 Glieder der ersten 4 Columnen, d. h. die Anzahl aller Unionen, Binionen, Ternionen und Quaternionen, welche man aus 10 Dingen bilden kann, um 1 kleiner ist als die Summe der ersten 11 Glieder [117] der vierten Columne, d. h. als die Anzahl der Combinationen zur höchsten der gegebenen Classen, welche man aus einer um 1 grösseren Anzahl von Dingen bilden kann. Dies kann man auch so einsehen: Die einzelnen Quaternionen aus 11 Dingen enthalten das elfte Ding entweder keinmal oder 1-, 2-, 3-, 4-mal. Die Quaternionen, in welchen das elfte Ding nicht vorkommt, sind offenbar identisch mit den Quaternionen der übrigen 10 Dinge; die Anzahl der Quaternionen, in welchen das elfte Ding einmal vorkommt, ist gleich der Anzahl der Ternionen von den übrigen 10 Dingen, und ebenso ist die Anzahl der Quaternionen, welche das elfte Ding zweimal, bez. dreimal enthalten, gleich der Anzahl der Binionen, bez. Unionen der übrigen 10 Dinge (denn es braucht das elfte Ding nur ein-, zwei- oder dreimal hinzugefügt zu werden, um Quaternionen zu erhalten). Ferner giebt es eine Quaternion, welche das elfte Ding viermal enthält. Daraus folgt, dass die Anzahl der Quaternionen von 11 Dingen um 1 grösser ist als die Anzahl aller Combinationen von 10 Dingen zu den Classen 1, 2, 3, 4 oder gleich der Anzahl aller Combinationen zu den Classen 0, 1, 2, 3, 4.

Ist also n die Anzahl der gegebenen Dinge und c die höchste Classenzahl, so findet man die Anzahl der Combinationen m. W. von $n + 1$ Dingen zu der c^{ten} Classe nach der Regel dieses Kapitels gleich $\binom{n+c}{c}$, und es ist daher die Anzahl der Combinationen m. W. zu allen Classen von 1 bis c (einschliesslich) gleich $\binom{n+c}{c} - 1$. Ist aber $c > n$, so kann man Zähler und Nenner von $\binom{n+c}{c}$ durch $(n+1)(n+2)\ldots c$ kürzen und folglich die gesuchte Zahl kürzer durch $\binom{n+c}{n} - 1$ ausdrücken. Daraus ergiebt sich die folgende

[118] **Regel**

für die Bestimmung der Anzahl von Combinationen mit Wiederholung zu mehreren von 0 an aufeinanderfolgenden Classen:

Man bilde zwei steigende arithmetische Reihen, deren eine mit der um 1 vermehrten Zahl der Dinge und deren andere mit 1 beginnt, welche beide die Differenz 1 und so viele Glieder haben, als die grösste Classenzahl Einheiten hat. (Ist aber diese grösser als die Anzahl der Dinge, so ist es vortheilhafter, die erste Reihe mit der um 1 vermehrten grössten Classenzahl zu beginnen und von jeder Reihe so viele Glieder zu nehmen, als Dinge gegeben sind.) Dividirt man dann das Product aus den Gliedern der ersten Reihe durch das Product aus den Gliedern der letzten Reihe, so giebt der Quotient die gesuchte Anzahl aller Combinationen (einschliesslich der Nullion).

Z. B. Die Anzahl aller Combinationen von 10 Dingen zu den Classen 0, 1, 2, 3, 4 ist $\frac{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1001$ und von 3 Dingen zu denselben Classen $\frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$.

Kapitel VI.

Anzahl der Combinationen mit beschränkter Wiederholung.

[119] In dem vorigen Kapitel war es gestattet, dass irgend eines der gegebenen Dinge so oft mit sich selbst combinirt werden konnte, als die Combinationsclasse Einheiten hatte. Auf diese Weise konnte zu jeder beliebigen Classe eine Combination gebildet werden, welche nur ein einziges Ding öfter wiederholt enthielt. Anders liegt die Sache, wenn ein jedes der gegebenen Dinge mit sich selbst nur in beschränkter Zahl, welche vorgegeben ist, verbunden werden kann. Wenn z. B. die Buchstaben a, b, c, d so miteinander combinirt werden sollen, dass in keiner Combination der Buchstabe a öfter als 5mal, b öfter als 4mal, c öfter als 3mal und d

öfter als 2mal wiederholt werden soll, so kann offenbar keine Combination, deren Classe höher als 5 ist, aus nur einem Buchstaben bestehen.

Die vier Buchstaben nach dem gegebenen Gesetze zu combiniren, ist aber ganz dasselbe, als wie 14 Buchstaben, unter denen $5a$, $4b$, $3c$, $2d$ sind, auf alle Arten so mit einander zu combiniren, dass keiner öfter in einer Combination vorkommt, als er selbst unter allen Buchstaben sich findet. Dies kommt aber wieder darauf hinaus, sämmtliche Theiler der Grösse $a^5\, b^4\, c^3\, d^2$ zu finden. Da nun die Theiler irgend einer Grösse nur als ebensoviele Combinationen ihrer Factoren sich darstellen, so können die Lehren dieses Kapitels vornehmlich dazu dienen, die Anzahl aller Theiler irgend einer Grösse aufzufinden.

Zunächst ist es augenscheinlich, dass es von einem Buchstaben a nur so viele Combinationen oder Theiler geben kann, als a selbst in der Anzahl der Dinge vorkommt, d. h. als der Exponent von a in der gegebenen Grösse angiebt. Zählt man auch die Nullion oder 1 als Theiler mit, so hat man hier die 6 Combinationen oder Theiler: 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5.

Nimmt man dann noch den Buchstaben b hinzu, so kann dieser mit den vorstehenden sechs Combinationen zusammen vorkommen, woraus ebensoviele neue Combinationen b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5b folgen. Fügt man nochmals b hinzu, so erhält man wieder sechs neue Combinationen b^2, ab^2, a^2b^2, a^3b^2, a^4b^2, a^5b^2. Nimmt man noch ein drittes und viertes b hinzu, so erhält man noch 2mal sechs oder zwölf weitere Combinationen. Der Buchstabe b liefert mithin sovielmal sechs neue Combinationen, als er selbst unter der gegebenen Anzahl von Dingen vorkommt oder als sein Exponent in der gegebenen Grösse Einheiten hat. [**120**] Hier hat man daher $4 \cdot 6$ Combinationen, welche b enthalten. Da vorher 6 Combinationen ohne b gefunden waren, so hat man jetzt $5 \cdot 6 = 30$ Combinationen gefunden.

Wenn nun jede einzelne dieser 30 Combinationen mit dem dritten Buchstaben c verbunden wird, so entstehen 30 neue Combinationen; fügt man diesen wieder c zu, so ergeben sich nochmals 30 neue Combinationen und aus diesen wiederum 30 neue, wenn man noch ein drittes c hinzunimmt. So sind $3 \cdot 30$ neue Combinationen gefunden, welche sämmtlich c enthalten; mit den früheren 30 Combinationen ohne c hat man daher jetzt $4 \cdot 30 = 120$ Combinationen.

Multiplicirt man schliesslich jede dieser 120 Combinationen mit d, bez. d^2 (da d mit dem Exponenten 2 in der gegebenen Grösse vorkommt), so erhält man $2 \cdot 120$ neue Combinationen, welche sämmtlich den Buchstaben d enthalten. Mit den 120 Combinationen ohne d hat man daher im ganzen $3 \cdot 120 = 360$ Combinationen gefunden. Ebenso gross ist auch die Anzahl aller Theiler der gegebenen Grösse $a^5 b^4 c^3 d^2$, wenn — was immer im Auge zu behalten ist — die Buchstaben a, b, c, d vier von 1 und von einander verschiedene Primfactoren vorstellen. Durch das Hinzutreten eines Buchstaben wird, wie klar zu erkennen ist, die Anzahl aller vorhergehenden Combinationen oder Theiler so oft vervielfacht, als der um 1 vermehrte Exponent des hinzutretenden Buchstaben angiebt. Durch diese Wahrnehmung gelangt man zu der folgenden

Regel,

um die Anzahl aller Theiler einer beliebigen Grösse oder aller Combinationen mehrerer Dinge, von denen einige einander gleich sind, zu bestimmen:

Man vermehre die Exponenten, mit welchen die eine gegebene Grösse bildenden Buchstaben in derselben vorkommen, um 1 und multiplicire die so vergrösserten Zahlen ineinander. Das Product derselben ist gleich der Anzahl aller Theiler [**121**] der gegebenen Grösse oder aller Combinationen, welche die jene Grösse zusammensetzenden Buchstaben bilden können. Von dieser Zahl ist 1 zu subtrahiren, wenn man die Eins von den Theilern oder die Nullion von den Combinationen ausschliessen will.

Z. B.: In $a^5 b^4 c^3 d^2$ haben die einzelnen Buchstaben die Exponenten 5, 4, 3, 2; vermehrt man jede dieser Zahlen um 1, so giebt das Product dieser so vermehrten Zahlen $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ als Anzahl aller Theiler der gegebenen Grösse (einschl. der Einheit).

Bemerkung. Ist die Anzahl der Buchstaben $a, b, c, d, \ldots$, welche eine gegebene Grösse bilden, gleich n und haben alle Buchstaben denselben Exponenten p, so ist die Anzahl aller Combinationen oder Theiler gleich $(p+1)^n$. Wenn speciell $p = 1$ ist, d. h. wenn die sämmtlichen Buchstaben der gegebenen Grösse nur in der ersten Potenz vorkommen oder wenn die zu combinirenden Dinge sämmtlich von einander

verschieden sind, wird die Anzahl der Theiler oder der Combinationen gleich 2^n. Dieser Fall ist identisch mit dem im zweiten Kapitel behandelten, und daher muss die hier gefundene Lösung mit jener übereinstimmen, wie es der Fall ist.

Wer aber den Erörterungen dieses Kapitels mit ein wenig Aufmerksamkeit gefolgt ist, kann — wenn es verlangt wird — leicht auch bestimmen, in wievielen Combinationen oder Theilern irgend ein Buchstabe oder Ding sich findet. Wird z. B. gefragt, in wievielen Theilern der gegebenen Grösse $a^5 b^4 c^3 d^2$ der Buchstabe a vorkommt, so braucht man nur zu bestimmen, wieviele Theiler (einschl. des Theilers 1) die übrige Grösse $b^4 c^3 d^2$ besitzt; denn fügt man allen diesen Theilern $a, aa, aaa, \ldots$ hinzu, so erhält man alle Theiler der ursprünglichen Grösse, in denen a in der ersten, zweiten, dritten, ... Potenz vorkommt. Daraus folgt, dass es so viele Theiler giebt, welche einen beliebigen Buchstaben in der gleichen Potenz enthalten, als die übrigen Buchstaben zusammen Theiler zulassen. Da $b^4 c^3 d^2$ nach der obigen Regel $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Theiler (einschl. 1) besitzt, so hat die Grösse $a^5 b^4 c^3 d^2$ ebensoviele Theiler, welche a enthalten, ebensoviele, welche a^2 enthalten, u. s. w. Wegen der fünften Potenz, in welcher a in der gegebenen Grösse vorkommt, findet man also, dass sie $5 \cdot 60 = 300$ Theiler besitzt, [122] in denen a überhaupt vorkommt. Ebenso leicht lässt sich die Anzahl der Combinationen oder Theiler bestimmen, welche z. B. a in der zweiten, b in der dritten Potenz enthalten. Denn wenn man den Theilern der übrigen Grösse $c^3 d^2$, deren Anzahl $4 \cdot 3 = 12$ ist, noch $a^2 b^3$ anfügt, so hat man offenbar sämmtliche Theiler, welche die gestellte Bedingung erfüllen.

Mehr Schwierigkeiten scheint vielleicht die Frage nach der Anzahl aller Theiler, welche dieselbe Dimension besitzen, zu bieten, d. h. nach der Anzahl der Combinationen zu jeder einzelnen Classe. Um diese Zahl zu bestimmen, wende ich ein Verfahren an, ähnlich dem, welches ich im ersten Theile nach Aufgabe IX zur Bestimmung der Anzahl der Würfe in Würfelspielen gebraucht habe. Ich schreibe der Reihe nach alle Combinationsclassen oder alle Dimensionen hin, welche in der gegebenen Grösse enthalten sind; also alle Zahlen von 0 bis 14 für die Grösse $a^5 b^4 c^3 d^2$. Unter die ersten sechs Zahlen schreibe ich sechs Einheiten, d. i. um eine mehr als der Exponent des ersten Buchstabens angiebt. Darunter schreibe ich nochmals sechs Einheiten, unter

diese wieder sechs Einheiten, und so fort, bis ich um eine Zeile mehr Einheiten habe als der Exponent des zweiten Buchstabens angiebt. Jede folgende Reihe aber wird stets um eine Stelle nach rechts gegen die vorhergehende eingerückt. Dann addire ich die senkrecht unter einander stehenden Einheiten, welche die Zahlen 1, 2, 3, 4, ... liefern. Von diesen Zahlen bilde ich wieder um eine mehr Zeilen, als der Exponent des dritten Buchstabens angiebt, und zwar ist wiederum jede Zeile um eine Stelle nach rechts gegen die vorhergehende einzurücken. Die Summation der senkrecht unter einander stehenden Zahlen liefert die Zahlen 1, 3, 6, 10, 14, ... Von diesen Zahlen schreibe ich in gleicher Anordnung um eine mehr Zeilen hin, als der Exponent des vierten Buchstabens angiebt, und addire die in jeder Columne stehenden Zahlen. In dieser Weise fahre ich so lange fort, als Buchstaben vorhanden sind. [**123**] Ich erhalte so die folgende Tafel*) [welche die Anzahl der Combinationen (oder Theiler) von a^5, a^5b^4, $a^5b^4c^3$, $a^5b^4c^3d^2$ zu den einzelnen Classen angiebt]:

Zu combinirende Dinge	Classe der Combinationen														
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
a^5	1	1	1	1	1	1									
		1	1	1	1	1	1								
			1	1	1	1	1	1							
				1	1	1	1	1	1						
					1	1	1	1	1	1					
a^5b^4	1	2	3	4	5	5	4	3	2	1					
		1	2	3	4	5	5	4	3	2	1				
			1	2	3	4	5	5	4	3	2	1			
				1	2	3	4	5	5	4	3	2	1		
$a^5b^4c^3$	1	3	6	10	14	17	18	17	14	10	6	3	1		
		1	3	6	10	14	17	18	17	14	10	6	3	1	
			1	3	6	10	14	17	18	17	14	10	6	3	1
$a^5b^4c^3d^2$	1	4	10	19	30	41	49	52	49	41	30	19	10	4	1

Es giebt also von $a^5b^4c^3d^2$ je einen Theiler der 0[ten] und 14[ten] Dimension, je vier Theiler der 1[ten] und 13[ten] Dimension,

*) *Vgl. auch* die Tafel auf S. 27. *H.*

u. s. w. Alle diese Theiler- oder Combinationszahlen zusammenaddirt geben 360, wie es auch sein muss. Wer früher bei den Würfelspielen das ähnliche Verfahren begriffen hat, wird auch dieses leicht verstehen.

Weiteres hierüber, besonders über die Theiler einer Grösse (was von unserem Ziele zu weit abseits führt), kann man nachlesen in den ersten fünf Abschnitten der »Exercitationes mathematicae« von *Franciscus van Schooten* und in den Kapiteln 3 und 4 der Abhandlung über die Combinationslehre, welche *John Wallis* seinem »Tractatus de Algebra« angehängt hat. Wir beeilen uns zu anderen Dingen zu kommen.

[124]

Kapitel VII.

Variationen ohne Wiederholung.

In den Combinationen, von welchen bis jetzt die Rede war, wurde keine Rücksicht auf die Ordnung und Stellung der Dinge genommen, und es konnte die aus den drei Buchstaben a, b, c mögliche Ternion entweder abc oder acb oder bac oder . . . geschrieben werden. Zuweilen muss man aber ausser der Verschiedenheit der Combinationen auch die Verschiedenheit in Ordnung und Stellung der combinirten Dinge beachten, wie es besonders bei Worten und Zahlen geschieht. Denn ab ist ein anderes Wort oder eine andere Silbe als ba und 12 eine andere Zahl als 21; wenn auch beide Male die Combinationen aus denselben Buchstaben und Ziffern gebildet sind, so unterscheiden sie sich doch durch die verschiedene Anordnung derselben.

Es bleibt uns also noch übrig, in diesem und in den folgenden Kapiteln die Lehre von den Combinationen in Verbindung mit ihren Permutationen (d. i. von den Variationen[26])) zu entwickeln, indem wir zeigen, auf wieviele verschiedene Arten mehrere verschiedene oder theilweise einander gleiche Dinge zu einer oder zu mehreren Classen mit einander combinirt und dann in jeder Combination permutirt werden können, und zwar sowohl wenn keines der gegebenen Dinge mit sich selbst combinirt werden darf, als auch wenn dies gestattet ist.

1. Es ist die Anzahl der Variationen mehrerer von einander verschiedener Dinge, von denen kein Ding mit sich selbst combinirt werden darf, zu einer bestimmten Classe zu finden.

Die Lösung dieser Aufgabe ist nach dem Vorhergehenden leicht anzugeben. Wenn n verschiedene Dinge zu der c^{ten} Classe mit einander zu combiniren sind, so ist die Anzahl der Combinationen, wenn auf die Reihenfolge der Dinge keine Rücksicht genommen wird, gleich $\binom{n}{c}$ [nach Kapilel IV]. Jede dieser Combinationen enthält c verschiedene Elemente, [**125**] welche [nach Kapitel I] $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots c$ mal die Reihenfolge ändern können. Folglich ist die Anzahl der Combinationen, wenn die Reihenfolge der Dinge berücksichtigt wird, d. i. der Variationen, um ebenso viele Male grösser als die obige Combinationszahl, also gleich

$$\binom{n}{c} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots c = n(n-1)(n-2) \ldots (n-c+1).$$

Dieses Resultat liefert die folgende

Regel

für die Bestimmung der Anzahl aller Variationen ohne Wiederholung zu einer bestimmten Classe:

Man bilde eine fallende arithmetische Reihe mit der Differenz 1, deren Anfangsglied gleich der Anzahl der Dinge ist und welche so viele Glieder hat, als die Classenzahl Einheiten; das Product dieser Glieder liefert die gesuchte Anzahl.

Z. B. ist bei 10 Dingen die Anzahl der Quaternionen mit Berücksichtigung der Reihenfolge der Dinge gleich $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$.

Folgerung 1. Wenn die Classe c gleich der Anzahl n der Dinge ist, so sind die Variationen identisch mit den einfachen Permutationen der n Dinge, da man immer alle n Dinge zu nehmen hat, was gerade im ersten Kapitel verlangt wurde. Dann ist

$$n(n-1)(n-2) \cdots (n-c+1) = n(n-1)(n-2) \cdots 1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n,$$

was mit der Regel des ersten Kapitels in Uebereinstimmung steht.

Folgerung 2. Die Combinationen aller n Dinge zu der ihrer Zahl gleichen Classe n lässt ebenso viele Permutationen zu, als alle Combinationen derselben Dinge zu der um 1 niedrigeren Classe $n - 1$ Permutationen zulassen. So lassen z. B. fünf Dinge fünfmal so viele Permutationen zu als vier Dinge; da aber von fünf Dingen fünf Quaternionen gebildet werden können, [**126**] so lassen diese fünf Quaternionen ebensoviele Permutationen zu als die eine Quinion, denn $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \binom{5}{1} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot$

Folgerung 3. Bei beliebig vielen Dingen ist die Summe der Anzahl der Unionen und Binionen (mit Berücksichtigung der Reihenfolge) gleich dem Quadrate der Anzahl der Dinge. Nach der Regel ist bei n Dingen die Anzahl der Unionen gleich n und der Binionen gleich $n(n - 1) = n^2 - n$; die Summe beider aber gleich n^2. Die neun Ziffern von 1 bis 9 liefern einfach oder zu zweien genommen $9 \cdot 9 = 81$ verschiedene Zahlen und ebensoviele sind unter den Zahlen von 1 bis 100, welche weder eine Null noch zwei gleiche Ziffern enthalten.

Folgerung 4. Die Anzahl der Variationen o. W. zu einer beliebigen Classe ist gleich der Anzahl der Permutationen von ebensovielen Dingen, von welchen so viele einander gleich sind, als die zu der gegebenen parallele Classenzahl Einheiten hat, und alle andern untereinander verschieden sind. Es giebt also ebensoviele Variationen zur 3ten Classe von 8 Dingen, als es Permutationen von 8 Dingen giebt, unter denen sich fünf gleiche befinden; denn es ist $8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$ [vergl. die 2te Regel in Kap. I].

2. Es ist die Anzahl der Variationen von mehreren verschiedenen Dingen zu allen Classen zusammen zu bestimmen, wenn kein Ding mit sich selbst combinirt werden darf.

Man erhält diese Zahl, wenn man die nach der vorigen Regel für die einzelnen Classen gefundenen Zahlen zu einander addirt. Doch kann man diese Zahl etwas leichter finden, wenn man eine nicht unwichtige Beziehung beachtet, in welcher zwei der gesuchten Zahlen zu einander stehen.

Hat man 4 Dinge zu variiren, so ist nach der obigen Regel die Anzahl aller Unionen gleich 4, aller Binionen gleich $4 \cdot 3$, aller Ternionen gleich $4 \cdot 3 \cdot 2$, aller Quaternionen gleich $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ und mithin aller Variationen o. W. zusammen gleich $4 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Bei fünf Dingen erhält man auf gleiche Weise für die Summen der Variationszahlen für die Classen 1, 2, 3, 4, 5 den Werth $5 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5(1 + 4 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$; [127] d. h. die Anzahl aller Variationen o. W. von 5 Dingen ist fünfmal so gross als die um 1 vermehrte Anzahl aller Variationen von 4 Dingen. Daraus kann man folgern, dass die Anzahl aller Variationen von n-Dingen n-mal grösser ist als die um 1 vermehrte Anzahl aller Variationen von $n - 1$ Dingen (wobei aber in beiden Fällen die Nullion ausgeschlossen ist).

Da es nun von einem Dinge nur eine Variation giebt, so ist die Anzahl aller Variationen von 2 Dingen gleich $2(1 + 1) = 4$;

folglich ist die Anzahl
aller Variationen von 3 Dingen gleich $3(4 + 1) = 15$,

und ferner die Anzahl
aller Variationen von 4 Dingen gleich $4(15 + 1) = 64$,

u. s. w., wie die folgende kleine Tafel angiebt:

Anzahl der Dinge:	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl der Variationen:	1	4	15	64	325	1956	13699

Anzahl der Dinge:	8	9	10	...
Anzahl der Variationen:	109600	986409	9864100	...

Mit den 9 Ziffern 1 bis 9 lassen sich daher 986409 Zahlen bilden, welche weder eine Null noch zwei gleiche Ziffern enthalten.

Kapitel VIII.

Variationen mit Wiederholung.

[128] 3. Es ist die Anzahl der Variationen von mehreren verschiedenen Dingen zu einer bestimmten Classe zu bestimmen, wenn jedes Ding auch mit sich selbst combinirt werden darf.

Während im vorigen Kapitel kein Ding mit sich selbst nbinirt werden durfte, ist dies hier gestattet; es kann ein ıg in einer Combination beliebig oft sich wiederholen. Wie hin ist aber wieder nach der Anzahl der Combinationen ragt, welche man bei Berücksichtigung der Ordnung und llung der Elemente erhält.

Es seien beliebig viele Dinge oder Buchstaben a, b, c, d, ... ;eben, deren Anzahl gleich m sei. Dann giebt es offenbar Unionen.

Diesen Unionen setzt man den Buchstaben a vor und er- t dadurch alle Binionen aa, ab, ac, ad, . . ., welche ; a beginnen und deren Anzahl ebenfalls gleich m ist.

Dann setzt man den einzelnen Unionen den Buchstaben b · und erhält alle Binionen ba, bb, bc, bd, . . ., welche ; b beginnen und deren Anzahl wieder gleich m ist.

In gleicher Weise setzt man den dritten Buchstaben c, ı vierten Buchstaben d und die übrigen Buchstaben, wenn :h mehr gegeben sind, den einzelnen Unionen vor und er- t dadurch immer neue Binionen, die theils mit c, theils ; d, theils mit einem der übrigen Buchstaben beginnen, l zwar beginnen jedesmal die m Binionen mit dem gleichen :hstaben. Auf diese Weise hat man offenbar sämmtliche ionen erhalten und zwar auf alle Arten permutirt. Ihre :ahl ist daher um sovielmal grösser als die Anzahl der ge, als Dinge gegeben sind; mithin ist sie für m Dinge ch mm oder m^2.

Wenn man nun diesen Binionen von neuem die einzelnen ge hinzufügt, indem man der Reihe nach jedes einzelne ge- ene Ding allen Binionen voransetzt, so erhält man alle Ter- nen aaa, aab, aac, aad, ..., aba, abb, ... Von diesen be- nen immer so viele mit demselben Buchstaben, als Binionen unden worden waren, und mithin ist die Anzahl aller Ter- nen um ebensovielmal grösser als die Anzahl der Binionen, die Anzahl der gegebenen Dinge angiebt; sie ist also ich m^3.

Auf gleiche Weise erhält man alle Quaternionen, wenn n den Ternionen die einzelnen Dinge der Reihe nach voran- zt, und es ergiebt sich deren Anzahl gleich m^4.

[129] Offenbar ist die Anzahl der Variationen zu einer iebigen Classe immer der m^{te} Theil von der Anzahl · Variationen zu der nächstfolgenden Classe. Da also Anzahl der Quaternionen gleich m^4 ist, so ist die

Anzahl der Quinionen gleich m^5, der Senionen gleich m^6 und allgemein der Variationen zu der n^{ten} Classe gleich m^n. Daraus folgt die

Regel

für die Bestimmung der Anzahl aller Variationen mit Wiederholung zu einer bestimmten Classe:

Die gegebene Anzahl von Dingen erhebe man zu der Potenz, deren Exponent gleich der Classenzahl ist, wodurch man die gesuchte Zahl findet.

Z. B. ist bei neun Ziffern die Anzahl aller Quaternionen mit Wiederholung und der aus ihnen abgeleiteten Permutationen gleich $9^4 = 6561$. Ebensoviele vierstellige Zahlen, in denen keine Null vorkommt, giebt es zwischen 1000 und 10000. So lassen sich aus den vier Vokalen *A*, *E*, *I*, *O*, durch welche in der Logik der vierfache Unterschied der Urtheile hinsichtlich ihrer Quantität und Qualität [27]) ausgedrückt wird, $4^3 = 64$ Ternionen bilden; deshalb giebt es auch ebensoviele gute und schlechte Modi des kategorischen Syllogismus, nicht nur 36, wie *Aristoteles* und seine Interpreten lehren. Wenn man noch die unbestimmten und singulären Urtheile von den allgemeinen und particularen unterscheidet, so entsteht ein achtfacher Unterschied der Urtheile, und die Zahl aller Modi steigt auf $8^3 = 512$.

4. Es ist die Anzahl aller Variationen mit Wiederholung zu mehreren Classen zusammen zu bestimmen.

Aus dem Vorhergehenden folgt, [**130**] dass die Summe aller Variationen zu den Classen 1, 2, 3, ..., n gleich der geometrischen Reihe

$$m + m^2 + m^3 + \cdots + m^n$$

ist, deren Summe gleich

$$\frac{(m^n - 1)\,m}{m - 1}$$

ist. Es verhält sich also $m - 1$ zu m, wie sich $m^n - 1$ zu der gesuchten Zahl verhält; hieraus ergiebt sich die folgende

Regel

für die Bestimmung der Anzahl aller Variationen mit Wiederholung zu allen Classen von 1 bis n (einschl.):

Die gesuchte Zahl verhält sich zu der um 1 verminderten n^{ten} Potenz der Anzahl aller Dinge, wie die Zahl aller Dinge zu der um 1 verkleinerten Zahl.

Z. B. verhält sich die Anzahl aller Variationen mit Wiederholung zu den Classen 1 bis 6 (einschl.) von 10 Ziffern zu $10^6 - 1$, wie sich 10 zu 9 verhält; daher ist die gesuchte Zahl gleich $\frac{10^6 - 1}{9} 10 = 1111110$.

Nicht alle diese Variationen stellen aber verschiedene Zahlen dar, denn wenn Zahlen mit einer oder mehreren Nullen beginnen, so unterscheiden sie sich nicht von den Zahlen, welche die übrigen Ziffern ohne die Nullen am Anfange bilden. Um alle überflüssigen Variationen auszuscheiden, muss man bedenken, dass von den zehn einziffrigen Zahlen nur eine, die Null nämlich, überflüssig ist. Von den zweiziffrigen Zahlen sind 10 überflüssig, da die Null einmal allen Ziffern vorgesetzt werden kann. Von den Zahlen, welche aus drei Ziffern bestehen, sind 100 überflüssig, da die Null entweder [**131**] dreimal allein (000) steht oder zweimal den übrigen neun Ziffern oder einmal den zwischen 9 und 100 liegenden zweiziffrigen Zahlen vorgesetzt ist. Unter den mit vier Ziffern geschriebenen Zahlen befinden sich 1000 überflüssige, denn den einzelnen Zahlen von 0 bis 999 einschl. kann man eine oder mehrere Nullen vorsetzen, damit Variationen zur 4ten Classe entstehen. Aus der gleichen Ueberlegung heraus findet man unter den fünfziffrigen Zahlen 10000 und unter den sechsziffrigen Zahlen 100000 überflüssige. Subtrahirt man die Anzahl aller dieser überflüssigen Zahlen, d. i. 111111 von der zuerst gefundenen Zahl 1111110, so bleibt 999999, und dies ist die Anzahl aller der Variationen aus 10 Ziffern zu den Classen 1 bis 6 (einschl.), welche ebenso viele verschiedene Zahlen darstellen. Dieses Resultat ist aber ohne weiteres einleuchtend, da man durch das Zählen von 1 bis 1000000, der ersten und kleinsten siebenziffrigen Zahl, genau 999999 verschiedene Zahlen findet; die Zahl 999999 ist die letzte und grösste sechsziffrige Zahl, auf welche unmittelbar die nur um 1 grössere Zahl 1000000 folgt.

Ebenso lässt sich die Anzahl aller Variationen der 24 Buchstaben des Alphabets zu den ersten 24 Classen finden; es verhält sich 23 : 24 wie die 24te Potenz von 24 (die Subtraction von 1 unterlässt man, da gegenüber 24^{24} die Eins nicht ins Gewicht fällt) zur gesuchten Zahl. Mit Hülfe von Logarithmen findet man leicht, dass diese Zahl aus 34 Ziffern besteht und grösser als 1391 Quintillionen ist. Ebenso gross ist die Zahl aller brauchbaren und unbrauchbaren Wörter, welche man aus den 24 Buchstaben des Alphabets auf jede Weise unter der Voraussetzung bilden kann, dass dieselben zu nicht mehr als 24 mit einander variirt werden.

Es ist hier der geeignete Ort, um auf den eigenthümlichen innigen Zusammenhang zwischen den Variationen und den Potenzen von Polynomen aufmerksam zu machen. Zur Auffindung aller Variationsbinionen der Buchstaben $a, b, c, d, \ldots$ muss man, wie im Anfange dieses Kapitels gezeigt ist, jeden einzelnen Buchstaben jedem andern vorsetzen, [**132**] und zur Auffindung aller Variationsternionen muss man nochmals jeden einzelnen Buchstaben allen jenen Binionen vorsetzen, u. s. w. Dasselbe aber geschieht auch, wenn der Ausdruck $a+b+c+d+\ldots$ auf die zweite, dritte, Potenz u. s. w. erhoben werden soll. Daraus folgt also, dass die Binionen der Buchstaben $a, b, c, d, \ldots$, wenn man sie als Theile eines Polynoms betrachtet, alle Glieder seines Quadrates, dass die Ternionen alle Glieder seines Cubus angeben, u. s. w. Die Glieder einer beliebigen Potenz eines Polynoms sind also die additiv verbundenen Variationen seiner Theile, gebildet zu der Classe, welche gleich dem Potenzexponenten des Polynoms ist. Da aber alle Glieder, welche dieselben Buchstaben, nur in verschiedener Anordnung enthalten, dasselbe Product darstellen, so fasst man sie, der Kürze wegen, in ein Glied zusammen, indem man diesem die Zahl der gleichen Glieder, welche der Coefficient des Gliedes genannt wird, vorschreibt. Dieser Coefficient eines jeden Gliedes ist aber offenbar identisch mit der Zahl der Permutationen, welche aus den Buchstaben dieses Gliedes gebildet werden können. Die Entwickelung einer beliebigen Potenz eines Polynoms hat so viele Glieder, als die Anzahl der Combinationen mit Wiederholung beträgt, welche aus den einzelnen Buchstaben des Polynoms zu der, jenem Potenzexponenten gleichen Classe gebildet werden können [vergl. Kap. V.].

Diese Bemerkung ist oft von grossem Nutzen, da man mit ihrer Hülfe für eine beliebige Potenz eines Polynoms sowohl die Anzahl der Glieder als auch den Coefficienten irgend eines Gliedes leicht bestimmen kann. So besteht z. B. die 10te Potenz des Trinoms $a + b + c$ [nach der Regel des Kap. V] aus $\binom{12}{10} = \binom{12}{2} = 66$ Gliedern, und es ist der Coefficient des Gliedes $a^5 b^3 c^2$ [nach der zweiten Regel des Kap. I] gleich $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = 2520$. Die dritte Potenz von $a + b + c + d$ hat $\binom{6}{3} = 20$ Glieder, und die Coefficienten von aab und abc sind 3 und 6.

Kapitel IX.

Anzahl der Variationen mit beschränkter Wiederholung.

Ich mache hier dieselbe Annahme wie im sechsten Kapitel; während aber dort alle verschiedenen Anordnungen einer Combination für eine einzige gezählt wurden, werden sie hier als ebenso viele verschiedene Variationen gerechnet. Ueber das in diesem Sinne gestellte Problem finde ich nichts Bestimmtes bei den verschiedenen Autoren. Ich ermittle die gesuchte Zahl in folgender Weise.

Es seien z. B. die Buchstaben a, b, c auf alle Arten zu variiren unter der Bedingung, dass in keiner Variation a öfter als 4-mal, b öfter als 3-mal und c öfter als 2-mal wiederholt wird, oder mit anderen Worten, es sollen die Buchstaben $a^4 b^3 c^2$, unter denen 4, 3 und schliesslich 2 einander gleiche sich befinden, auf alle Weisen (ohne Wiederholung) variirt werden, und es soll die Anzahl der Variationen sowohl für jede einzelne Classe, als auch für alle Classen zusammen bestimmt werden.

Wird die Nullion durch 1 bezeichnet, so sind augenscheinlich die Variationen, welche aus a^4 gebildet werden können: 1, a, a^2, a^3, a^4. Diesen hängt man zunächst b, dann b^2 und schliesslich b^3 an und erhält so: b, ab, a^2b, a^3b, a^4b; b^2, ab^2, a^2b^2, a^3b^2, a^4b^2 und b^3, ab^3, a^2b^3, a^3b^3, a^4b^3, ganz so, wie es im Kap. VI geschehen ist. Die ersten fünf dieser Com-

plexionen, welche *b* einmal enthalten, lassen bez. 1, 2, 3, 4, 5 Permutationen zu, und liefern dadurch *b*; *ab* und *ba*; *aab*, *aba* und *baa*, u. s. w. Die zweiten fünf Complexionen, welche *b* zweimal enthalten, lassen 1, 3, 6, 10, 15 Permutationen (gemäss den Dreieckszahlen) zu und geben *bb*; *abb*, *bab*, *bba*; u. s. w. Die dritten fünf Complexionen, welche *b* dreimal enthalten, lassen 1, 4, 10, 20, 35 Permutationen (gemäss den Viereckszahlen) zu und liefern *bbb*; *abbb*, *babb*, *bbab* und *bbba*; u. s. w. Würde *b* noch öfter in Complexionen auftreten, so würden die zugehörigen Permutationszahlen wie die höheren figurirten Zahlen fortschreiten. Nun fügt man den sämmtlichen bisher erhaltenen Variationen 1; *a*, *b*; *aa*, *ab*, *ba*, *bb*; *aaa*, *aab*, *aba*, *baa*, *abb*, *bab*, *bba*, *bbb*; ... den dritten Buchstaben *c* erst einmal und dann zweimal hinzu und erhält die neuen Complexionen *c*; *ac*, *bc*; *aac*, *abc*, *bac*, *bbc*; ... [134] und *cc*; *acc*, *bcc*; *aacc*, *abcc*, *bacc*, *bbcc*; .... Von diesen lassen die ersteren, in welchen *c* nur einmal vorkommt 1, 2, 3, 4, ... Permutationen (nach den natürlichen Zahlen) zu hinsichtlich dieses Buchstabens *c*, ohne Aenderung der Reihenfolge der übrigen Buchstaben; denn die Union *c* lässt eine Permutation zu, jede der Binionen *ac* und *bc* zwei Permutationen, jede der Ternionen *aac*, *abc*, *bac*, *bbc* drei, u. s. w. Die Complexionen aber, welche c^2 enthalten, gestatten (nur in Bezug auf *c*) 1, 3, 6, 10, ... Permutationen (nach den Dreieckszahlen); nämlich die Binion *cc* gestattet eine Permutation, jede der Ternionen *acc* und *bcc* deren zwei, jede der Quaternionen *aacc*, *abcc*, *bacc*, *bbcc* deren sechs, u. s. w. Diese Zahlen gelten — wie nochmals ausdrücklich hervorgehoben werden soll — nur bei unveränderter Reihenfolge der von *c* verschiedenen Buchstaben, denn sonst würde z. B. *abcc* nicht 6, sondern 12 Permutationen zulassen, deren Hälfte aber der andern Quaternion *bacc* zuzutheilen sind. Wäre noch ein vierter Buchstabe vorhanden, so würde dieser nun in ähnlicher Weise mit allen bisher gefundenen Complexionen seiner Dimension entsprechend ein- oder mehrmals verknüpft; die so neu entstehenden Complexionen gestatten hinsichtlich des vierten Buchstabens Permutationen, deren Zahlen wie die natürlichen Zahlen, die Dreieckszahlen, ... fortschreiten, je nachdem der vierte Buchstabe einmal, zweimal, ... hinzugetreten ist. Auf diese Weise kann keine der gesuchten Variationen übersehen und auch keine doppelt gezählt werden.

Aus diesen Erörterungen wird aber die Construction der
genden Tafel leicht verständlich, durch welche die Anzahl
r gesuchten Variationen sowohl zu den einzelnen Classen
auch zu allen zusammen sich bestimmen lässt. Man schreibt
r Reihe nach alle Classen hin, zu welchen die gegebenen
nge, also hier $a^4 b^3 c^2$, Variationen eingehen können; dies
d hier die Zahlen 0 bis 9. Unter die ersten derselben
ıreibt man um einmal mehr die Zahl 1, als der Exponent
s ersten Buchstabens Einheiten hat, d. h. hier fünfmal. In
nächste Zeile schreibt man ebensoviele Zahlen der natür-
hen Zahlenreihe, in die dritte ebensoviele Dreieckszahlen,
die vierte ebensoviele Viereckszahlen und so fort, bis man
ı eine mehr Zeilen hat, als der Exponent des zweiten
ıchstabens angiebt; hierbei ist, wie es auch im Kap. VI der
ll war, jede folgende Zeile um eine Stelle nach rechts
gen die vorhergehende einzurücken. Dann addirt man die
nkrecht unter einander stehenden Zahlen. Diese Summen-
hlen werden mit ebensovielen Zahlen der natürlichen Zahlen-
he, dann mit ebensovielen Dreieckszahlen, und so fort, mul-
licirt, bis man (einschl. der Zeile mit den Summenzahlen)
ı eine mehr Zeilen hat, als der Exponent des dritten Buch-
bens angiebt; jede folgende Zeile ist dabei wieder um eine
lle gegen die vorhergehende nach rechts einzurücken. Dann
dirt man sämmtliche Columnen dieser letzten Zeile. Nach
ser Vorschrift hat man fortzufahren, wenn noch mehr Buch-
ben gegeben sind. [135] Durch die letzte Addition erhält
n die Anzahl der geforderten Variationen zu den einzelnen
ıssen, deren Quersumme die Anzahl dieser Variationen zu
en Classen zusammen bestimmt. Hier folgt die Tafel
$a^4 b^3 c^2$:

Zu variirende Dinge	Classe der Variationen									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a^4	1	1	1	1	1					
		1	2	3	4	5				
			1	3	6	10	15			
				1	4	10	20	35		
$a^4 b^3$	1	2	4	8	15	25	35	35		
		1	4	12	32	75	150	245	280	
			1	6	24	80	225	525	980	1260
$a^4 b^3 c^2$	1	3	9	26	71	180	410	805	1260	1260

Die letzte Zeile der Tafel liefert die Anzahl der Variationen (o. W.) aus $a^4 b^3 c^2$ zu den einzelnen Classen 0 bis 9; die Quersumme aller dieser Zahlen ist 4025 und soviele Variationen zu den Classen 0 bis 9 zusammen giebt es. Die Richtigkeit dieses Verfahrens kann man noch dadurch bestätigen, dass man sich [nach Kap. VI] die $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Combinationen von $a^4 b^3 c^2$ bildet, hinter jede dieser 60 Combinationen die zugehörige Permutationszahl schreibt und dann alle Permutationszahlen addirt*).

[**136**] Sieht man von der Nullion ab, welche keine Zahl liefert, so folgt aus dem Vorstehenden, dass aus drei verschiedenen Ziffern (die Null ausgeschlossen) 4024 verschiedene Zahlen gebildet werden können, in welchen die eine Ziffer nicht öfter als viermal, eine zweite nicht öfter als dreimal und die dritte nicht öfter als zweimal vorkommt. Wieviele Ziffern aber auch gegeben sein mögen, immer ist die Anzahl ihrer Variationen zur höchsten Classe, welche gleich der Anzahl der gegebenen Dinge ist, gleich der Anzahl ihrer Variationen zur nächstniedrigeren Classe[28]).

Damit bin ich an das Ende dessen gekommen, was ich über die Combinatorik hier zu sagen mir vorgenommen hatte. In diesen letzten Kapiteln**), in welchen [**137**] bei den Combinationen auch die Ordnung und Stellung der Dinge berücksichtigt wurde und ein und dasselbe Ding in der nämlichen Complexion öfter vorkommen konnte, hätte ich allerdings wieder noch eine Reihe von Fragen mir zur Lösung vorlegen können. So hätte ich fragen können, in wievielen Combinationen bez. Variationen ein oder mehrere bestimmte Dinge zusammen oder einzeln vorkommen, ähnlich wie es in Kap. IV geschehen ist; oder irgend ein Ding ein-, zwei-, drei-, vier-...mal vorkommt; oder keines der gegebenen Dinge mehr als ein-, zwei-, drei-...mal vorkommt; oder ein bestimmtes der gegebenen Dinge den ersten, zweiten, dritten ... Platz einnimmt; und dergleichen Fragen mehr. Da aber Fragen dieser Art in unbegrenzter Zahl gestellt werden können, so ziehe ich es vor, auf keine einzugehen und für den Fall, dass einige solcher Fragen für spätere Untersuchungen wichtig werden,

---

*) In dem Original ist auch hierfür eine ausführliche Tafel gegeben, welche aber, um sie hier abzudrucken, von zu geringem *Interesse ist.* *H.*

***) Kapitel V—IX.*

› Lösung derselben erst dann zu geben, statt jetzt durch
.che specielle Untersuchungen ein Unternehmen anzufangen,
ı welchem ein Ende nicht abzusehen ist. Deshalb schliesse
ı hiermit den zweiten Theil dieses Buches und wende mich
'ort zu dem dritten Theile, in welchem ich den grossen
ıtzen der Combinationslehre für die Wahrscheinlichkeits-
:hnung an sehr vielen Aufgaben der verschiedensten Art
ıtlich zeigen werde.

Anmerkungen.

Um die volle Bedeutung von *Jakob Bernoulli's* Ars conjectandi, von deren Erscheinen an eine neue Epoche in der Entwickelung der Wahrscheinlichkeitsrechnung datirt werden muss, in das rechte Licht treten zu lassen, sei zunächst in Kürze der Stand dieser mathematischen Disciplin skizzirt, ehe sich *Bernoulli* derselben zuwandte. Denjenigen Leser, welcher noch ausführlichere Mittheilungen über die geschichtliche Entwickelung der Wahrscheinlichkeitsrechnung wünscht, verweise ich auf die beiden Werke: *Todhunter*, A history of the mathematical theory of probability from the time of Pascal to that of Laplace (Cambridge and London, 1865) und *M. Cantor*, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 2. und 3. Band (Leipzig, 1892 und 1898), welchen auch die folgenden historischen Angaben zumeist entnommen sind.

Die Glücksspiele, welche sich zu allen Zeiten und überall einer grossen Beliebtheit erfreut haben, mussten frühzeitig gewisse Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung nahe legen, und in der That tritt der Begriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit uns zum ersten Male beim Würfelspiele entgegen. Wie *Libri* in seiner Histoire des sciences mathématiques en Italie angiebt, finden sich in einem, 1477 in Venedig gedruckten Commentare zu *Dante's* Divina Commedia Untersuchungen über die Häufigkeit der mit drei Würfeln möglichen Würfe angestellt. Bald darauf finden wir in einem mathematischen Werke, der Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita von *Luca Paciuolo* (ca. 1445—ca. 1514), welche 1494 in Venedig gedruckt wurde, zwei sogenannte Theilungsaufgaben, deren *eine zwei*, deren andere drei Spieltheilnehmer voraussetzt,

stellt. Die Lösungen derselben sind falsch, wie dies bei der ringen Entwickelung der mathematischen Hülfsmittel zu jener it nicht Wunder nehmen kann. Setzt man an Stelle der hlen in der einen Aufgabe Buchstaben, so will *Paciuolo* i einem Glücksspiele, welches auf s von einem Spieler zu winnende Einzelspiele gerichtet ist, den Einsatz zwischen n beiden Spielern, von welchen der eine p, der andere q iele bereits gewonnen hat, im Verhältnisse $p : q$ theilen. *ieronimo Cardano* (1501—1576) erkennt zwar in seiner ractica Arithmeticae generalis (von 1539), dass diese sung falsch ist, und dass ihr Fehler vornehmlich in der chtberücksichtigung der Zahl s, der Anzahl aller zu gennenden Spiele, liegt, giebt aber selbst ebenfalls einen richtigen Werth für das obige Verhältniss, nämlich $+ 2 + 3 + \cdots + (s - q)] : [1 + 2 + 3 + \cdots + (s - p)]$. *icolo Tartaglia* (1500—1557) ist in seinem General rattato di numeri et misure (von 1556) sogar der Anht, dass es »keine streng beweisbare Auflösung der Aufgabe be, weil die Aufgabe mehr nach Recht als nach Vernunftünden zu behandeln sei«, und bezeichnet $(s + p - q) : (s + q - p)$ s das gerechteste Theilungsverhältniss. Bei *Cardano* findet ch noch, wenn auch in etwas anderer Fassung die Aufgabe, elche später von *Niclaus I. Bernoulli* (1713) gestellt und n *Daniel Bernoulli* in seiner neuen Theorie eines Maasses r den Zufall (Abhandlungen der Petersburger Akademie 1730 d 1731, deutsche Uebersetzung mit Anmerkungen von *A. ringsheim* in der »Sammlung älterer und neuerer staatsissenschaftlicher Schriften des In- und Auslandes, Leipzig S96) behandelt wurde und welche seitdem als Petersburger roblem berühmt geworden ist. Eine andere Arbeit *Carano*'s wird später noch Erwähnung finden.

Auf diese Vorläufer folgen als eigentliche Begründer der Vahrscheinlichkeitsrechnung (géométrie du hazard oder leae geometria), welche gleichzeitig und unabhängig von inander auf verschiedenen Wegen zu ihren Grundlagen gehrt wurden, die beiden französischen Mathematiker *Blaise Pascal* (1623—1662) und *Pierre de Fermat* (1601—1665). em Ersteren wurden von einem Spieler *de Méré* zwei Fragen estellt, von welchen die eine zu wissen wünscht, mit wieielen Würfen man es wagen kann, mit zwei Würfeln den echserpasch werfen zu wollen (vgl. S. 32 dieses Bändchens), nd die andere nach dem Theilungsverhältnisse des Spiel-

einsatzes bei zwei Spielern fragt, wenn sie das Spiel vor seiner Beendigung abbrechen. Letztere war es besonders, welche *Pascal's* Interesse erregte, und er erkannte sehr richtig, dass es nur auf die Anzahl der Gewinnspiele ankommt, welche jedem Spieler, um zu gewinnen, noch fehlen. *Pascal* gab die Lösung mit Hülfe seiner »méthode des partis«. Wird das Spiel durch dreimaliges Gewinnen des einen Spielers entschieden und hat A einmal, B noch keinmal gewonnen, so schliesst *Pascal* folgendermaassen. Hätte A 2- und B 1-mal gewonnen, so würde das nächste Spiel A entweder den Einsatz gewinnen lassen oder beide Spieler gleichstellen. Mithin gebührt A unbedingt die Hälfte des Einsatzes von vorn herein, und er spielt nur um die andere Hälfte, von welcher, wenn das folgende Spiel unterbleibt, jedem der Spieler die Hälfte, d. i. $\frac{1}{4}$ des Einsatzes zukommt. Folglich muss A $\frac{3}{4}$ und B $\frac{1}{4}$ des Einsatzes erhalten. Wenn aber A 2- und B keinmal gewonnen hätte, so würde A durch das nächste Spiel entweder den ganzen Einsatz gewinnen oder auf den Stand der vorigen Annahme kommen, nach welchem er $\frac{3}{4}$ des Einsatzes zu fordern hat. Er spielt also nur um $\frac{1}{4}$, und folglich gebührt ihm, wenn das nächste Spiel unterbleibt, $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$ und B $\frac{1}{8}$ des Einsatzes. Steht das Spiel, wie ursprünglich vorausgesetzt wurde, auf 1 zu 0 Gewinnspiele, so bringt das nächste Spiel A und B entweder auf 2 zu 0 oder auf 1 zu 1. Im ersteren Falle gebührt ihm $\frac{7}{8}$ des Einsatzes, im letzteren $\frac{1}{2}$, und mithin spielt er nur um $\frac{7}{8} - \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$, wovon ihm $\frac{3}{16}$ zukommt, wenn das Spiel unterbleibt. Folglich hat er $\frac{11}{16}$ des Einsatzes und B $\frac{5}{16}$ desselben zu fordern. Bei der Verbesserung dieser Methode bediente sich *Pascal* des von ihm erfundenen arithmetischen Dreiecks (Traité du triangle arithmétique) und seine äusserst elegante Methode (vgl. *M. Cantor*, a. a. O., Bd. 2, S. 689—691) steht, wie *Cantor* mit Recht hervorhebt, der sogleich zu erwähnenden combinatorischen Methode *Fermat's* sicher nur deshalb nach, weil sie sich nicht, wie die letztere, auf mehr als zwei Spieler ausdehnen lässt.

Fermat wandte die Combinationslehre auf die obige Aufgabe an, indem er sich sagte, dass mit spätestens vier weiteren Spielen das Spiel beendigt sein müsse. Ueber den Ausfall dieser vier Spiele zu Gunsten des A oder des B sind 16 verschiedene Möglichkeiten vorhanden, welche sich mit Hülfe der Combinationslehre leicht angeben lassen und von denen 11 dem A und 5 dem B günstig sind.

Pascal und *Fermat* theilten sich ihre Versuche und Me-
hoden gegenseitig brieflich mit, und es ist ihre Einmüthigkeit
ım so erfreulicher, wenn man auf die erbitterten Streitig-
keiten hinblickt, welche wenige Jahrzehnte später zwischen
Leibniz und *Newton*, zwischen *Jakob* und *Johann Ber-
ıoulli* geführt wurden. Besonders schön äussert sich diese
'reude an den beiderseitigen Entdeckungen in einem Briefe
Pascal's an *Fermat* vom 29. Juli 1654: »Je ne doute plus
ıaintenant que je ne sois dans la vérité, après la rencontre
lmirable où je me trouve avec vous. Je vois bien que la
érité est la même à Toulouse et à Paris« *) (vgl. *M. Cantor*,
istorische Notizen über die Wahrscheinlichkeitsrechnung, Halle
374). In die Oeffentlichkeit drang von diesen Untersuchun-
ɜn und Resultaten nur mündlich Kunde, da *Pascal*'s Traité
u triangle arithmétique erst 1665, drei Jahre nach seines
erfassers Tode, und sein Briefwechsel mit *Fermat* noch
päter veröffentlicht wurde.

Gesprächsweise hatte auch *Christian Huygens* (1629—
395) während seiner Anwesenheit in Paris im Sommer 1655
enntniss von diesen ganz neuen Untersuchungen erhalten,
ıne aber die von *Pascal* und *Fermat* geheim gehaltenen
ethoden kennen zu lernen. Daher konnte er mit Recht in
er vom 27. April 1657 datirten Vorrede zu seiner Abhand-
ıng: »De ratiociniis in ludo aleae« behaupten, dass er
en ganzen Gegenstand von den ersten Anfängen zu entwickeln
enöthigt gewesen sei, wenn er auch *Pascal*'s und *Fermat*'s
'riorität voll anerkenne. Die ursprünglich holländisch ge-
chriebene Abhandlung *Huygens*' erschien in lateinischer
Tebersetzung als Anhang zu den Exercitationum mathe-
ıaticarum libri quinque (vom Jahre 1657) des jüngeren
Franciscus van Schooten (1615—1660), welcher Professor
n der Universität Leyden und der Lehrer von *Huygens* war.
)ie Methode, welche *Huygens* benutzt, ist die des arith-
ıetischen Mittels und findet ihren prägnanten Ausdruck
ı dem Satze III auf Seite 7 dieses Bändchens; mit ihrer
Iülfe löst dann *Huygens* eine Reihe von Aufgaben über
Hücks- und Würfelspiele, welche aber sämmtlich nur in Zahlen-
verthen gestellt sind.

---

*) Ich zweifele jetzt nicht mehr an der Richtigkeit meiner
Resultate, da ich mich in so bewundernswürdiger Uebereinstimmung
ıit Ihnen befinde. Ich sehe, dass die Wahrheit dieselbe in Toulouse
vie in Paris ist.

Hiermit ist der Stand der Wahrscheinlichkeitsrechnung skizzirt, wie er sich darbot, als *Jakob Bernoulli* sich mit derselben zu beschäftigen anfing. Denn wenn auch seine Ars conjectandi ihrem Erscheinen nach einer späteren Zeit angehört, so ist zu beachten, dass sie thatsächlich, wenigstens ihrem Inhalte nach, in einer früheren Zeit (ca. 1680—1685) entstanden ist, da *Bernoulli* selbst angiebt, dass er sein berühmtes Theorem vor ungefähr 20 Jahren gefunden hätte. Es sind sogar Werke über Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche zwar vor *Bernoulli*'s Ars conjectandi erschienen sind, schon von dieser beeinflusst gewesen, da ihre Verfasser Nachrichten über die *Bernoulli*'schen Forschungen bekommen hatten, wie dies z. B. *de Montmort* von seinem Werke ausdrücklich bemerkt. Ehe ich mich aber der Besprechung des Ars conjectandi zuwende, seien hier — dem in *Ostwald*'s Klassikern üblichen Gebrauche folgend — einige kurze Angaben über *Jakob Bernoulli*'s Lebensschicksale eingeschaltet.

Ein Vorfahre von *Jakob Bernoulli* hatte in der zweiten Hälfte des 16. Jahrhunderts Antwerpen verlassen, um sich den dortigen religiösen Verfolgungen zu entziehen, und sich in Frankfurt am Main niedergelassen. Von hier siedelte einer seiner Enkel im Jahre 1622 nach Basel über, wo dessen ältester Sohn *Niclaus* (1623—1708) als Kaufmann und Mitglied des grossen Rathes von Basel zu hohem Ansehen gelangte. Von seinen elf Kindern sind das fünfte und zehnte die beiden berühmten Mathematiker *Jakob* und *Johann*. Der ältere der beiden Brüder *Jakob*, welcher uns hier vornehmlich interessirt, wurde am 27. December 1654 in Basel geboren. Nach dem Willen seines Vaters studirte er Theologie, daneben aber seinen eigenen Neigungen folgend Mathematik und Astronomie. Nach der Beendigung seines Studiums (1676) unternahm er längere Reisen, von denen er im Jahre 1682 nach Basel zurückkehrte. Dort widmete er sich, nachdem er eine ihm angebotene Predigerstelle in Strassburg im Elsass ausgeschlagen hatte, ganz der Lehrthätigkeit in Mathematik und Physik und erhielt im Jahre 1687 die Professur für Mathematik an der Baseler Universität, wo sein jüngerer Bruder *Johann* (1667—1748) sein hervorragendster Schüler war und nach *Jakob*'s Tode auch seine Professur erhielt. Im Jahre 1699 wurde *Jakob* in Folge seiner ausgezeichneten wissenschaftlichen Erfolge Mitglied der Pariser Akademie. Schon im Alter von 51 Jahren entriss ihn

ı 16. August 1705 ein allzu früher Tod der Wissenschaft; nem Wunsche gemäss wurde auf seinem Grabstein eine garithmische Spirale, welcher er zwei berühmte Abhandlunn gewidmet hatte, mit der Unterschrift: »Eadem mutata surgo«*) eingemeisselt und dadurch gleichzeitig seinen ssenschaftlichen Erfolgen und seinem Glauben an die Unrblichkeit ein Denkmal gesetzt.

Es sei an dieser Stelle noch der drei anderen Mitglieder r Familie *Bernoulli*, welche derselben zu ihrer einzigartigen deutung für die Geschichte der Mathematik verholfen haben, dacht, da ich dieselben bereits zu nennen hatte und auch ch von ihnen zu sprechen haben werde. Es sind dies *clous I. Bernoulli* (1687—1759), welcher ein Sohn eines Alter zwischen *Jakob* und *Johann* stehenden Bruders war, d zwei Söhne von *Johann*, nämlich *Niclaus II.* (1695—26) und *Daniel* (1700—1782). Wegen ausführlicherer ttheilungen verweise ich auf *P. Merian*, Die Mathematiker ernoulli, Basel 1860.

Eine Würdigung der unsterblichen Verdienste, welche sich *kob Bernoulli* um die verschiedenen Zweige der Mathematik worben hat, hier zu geben, ist weder meine Aufgabe, noch eht mir der nöthige Raum zu einer solchen zur Verfügung. s ist eine solche kurz nach seinem Tode von einem seiner hüler *Jakob Hermann* (1678—1733) in den Leipziger cta Eruditorum vom Januar 1706 erschienen, und kein eringerer als *Leibniz* selbst erkannte *Jakob Bernoulli*'s osse Verdienste um die Entwickelung seiner Differentialchnung mit den Worten an, welche er in den Nekrolog *ermann*'s hineincorrigirte, dass »der neue Calcül mit gleichem echte verdiene der Calcül der beiden *Bernoulli* als der inige genannt zu werden«. Auch die höchst unerquicklichen reitigkeiten zwischen den beiden Brüdern *Jakob* und *Johann* rf ich hier unerwähnt lassen.

Ich wende mich vielmehr sofort zu *Jakob Bernoulli*'s behmter Ars conjectandi. Wie aus zwei Stellen in derselben, nem Citate auf Seite 32 in dem ersten Theile (dieser Ausbe) und dem vorletzten Abschnitte auf Seite 92 in dem erten Theile hervorgeht, hatte *Jakob Bernoulli* in den Jahren 79—1685 sich mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu

---

*) Als dieselbe stehe ich verwandelt wieder auf.

beschäftigen angefangen. Trotzdem hinterliess er bei seinem Tode die Ars conjectandi noch unvollendet. Wie aus dem von *Niclaus I. Bernoulli* verfassten Vorworte des Werkes hervorgeht, wurde das Manuscript in der Histoire de l'Académie des sciences de Paris für das Jahr 1705 (in *Fontenelle's* Éloge) und in dem Journal des Sçavans vom Jahre 1706 angekündigt und besprochen. Die Verleger, die Gebrüder *Thurn* in Basel, wandten sich wegen Vollendung des Werkes zunächst an *Jakob's* Bruder *Johann*, welcher am meisten dazu geeignet erschien, und dann an seinen Neffen *Niclaus I.*, welcher in seiner Erstlingsarbeit: »Specimina Artis conjectandi ad quaestiones Juris applicatae« eine Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Rechtsfragen gemacht hatte. Beide lehnten aber die Aufforderung ab, der Letztere mit dem ausdrücklichen Hinweise auf seine noch zu geringe Erfahrung, welche zur Behandlung eines so schwierigen Stoffes durchaus unzureichend sei. Schliesslich entschloss sich *Niclaus I.* das Manuscript, soweit es von *Jakob* druckfertig hinterlassen war, unvollendet herauszugeben, und liess im Anfange des September 1713 das Werk gedruckt erscheinen. In der Vorrede forderte er *Pierre Rémond de Montmort* (1678—1719), den Verfasser des 1708 erschienenen Essai d'analyse sur les jeux de Hazard, und *Abraham de Moivre* (1667—1754), dessen Abhandlung De mensura sortis 1711 erschienen war. Der ebenso wie die Vorrede in lateinischer Sprache verfassten Ars conjectandi hat der Herausgeber noch zwei weitere Abhandlungen *Jakob Bernoulli's*, den Tractatus de seriebus infinitis earumque summa finita, et usu in quadraturis spatiorum et rectificationibus curvarum und einen in französischer Sprache verfassten Brief über das Ballspiel: Lettre à un Amy sur les Parties du jeu de Paume — welcher letztere besonders paginirt ist — beigefügt. In die zweibändige Ausgabe von *Jakob Bernoulli's* Werken, welche 1744 von *G. Cramer* herausgegeben wurden, ist die Ars conjectandi nicht aufgenommen, wie hier ausdrücklich bemerkt sein mag; auch in *Johann Bernoulli's* Werken welche *Cramer* 1742 herausgegeben hatte, ist dieselbe nicht wieder abgedruckt, — *F. Hoefer* behauptet in seiner Histoire des Mathématiques (Paris, Hachette, 1895) irrthümlich das Gegentheil — wenn auch sonst Abhandlungen des einen Bruders falls es zum Verständnisse wünschenswerth war, von *Cramer* in die Werke des andern Bruders aufgenommen sind.

ne französische Uebersetzung des ersten Theiles der
onjectandi ist im Jahre 1801 von *L. G. F. Vastel*
n veröffentlicht unter dem Titel: L'Art de conjec-
, traduit du Latin de *Jacques Bernoulli*; avec
observations, éclaircissements et additions.
weite Theil wurde von *Maseres* in das Englische über-
nd in einem Sammelbande von Abhandlungen verschie-
Autoren, welcher 1795 unter dem Titel: The doctrine
rmutations and combinations, being an essen-
nd fundamental part of the doctrine of chances
laseres herausgegeben wurde, veröffentlicht. Eine Neu-
e der ganzen Ars conjectandi ist bisher nirgends
nen.
der vorliegenden Ausgabe erscheint die Ars conjec-
zum ersten Male in deutscher Sprache, wobei der Ueber-
g die Seitenzahlen der Originalausgabe in eckigen Klam-
eingefügt sind. Weggelassen ist die Vorrede von
us I. Bernoulli und die Vorrede von *Christian Huygens*
ner Abhandlung De ratiociniis in ludo aleae; in
sind nur die historischen Angaben von Interesse, welche
schon in der vorstehenden Skizze Erwähnung finden
n. Ferner sind die Seiten 79, 80, 81 der Originalausgabe,
in den speciellen Textanmerkungen noch Erwähnung
werden, die Vorrede zum dritten Theile, welche mir
von *Jakob Bernoulli* herzustammen scheint und ganz
entlichen Inhalts ist, und der Tractatus de seriebus
tis, welcher in keinem Zusammenhange mit der Ars
ctandi steht, nicht in diese Neuausgabe aufgenommen.
bersetzung schliesst sich thunlichst getreu dem ursprüng-
Texte an; nur wo ermüdend weitschweifige Stellen zu
den waren, sind kleine Aenderungen vorgenommen,
natürlich aber den Sinn in keiner Weise verändern.
statt der wörtlichen Uebersetzung des Titels »Muth-
ungskunst« die jetzt gebräuchliche Bezeichnung
rscheinlichkeitsrechnung« gewählt ist, wird wohl
eine Billigung finden.
i der hohen wissenschaftlichen Bedeutung, welche der
onjectandi zukommt, bedarf diese deutsche Ausgabe
weiteren Rechtfertigung; ich möchte eher behaupten,
e eine ihrem genialen Verfasser gegenüber abzutragende
war, zumal bereits vor einigen Jahren *Daniel Ber-*
's Theorie eines Maasses für den Zufall, welche ganz

auf der Ars conjectandi fusst, in deutscher Uebersetzung, wie oben erwähnt, wenn auch leider nicht in einer Sammlung mathematischer Schriften erschienen ist.

Die Ars conjectandi zerfällt in vier Theile, deren erster die schon öfter genannte *Huygens*'sche Abhandlung De ratiociniis in ludo aleae neu abgedruckt und mit Anmerkungen von *Jakob Bernoulli* versehen enthält. In diesen Anmerkungen aber liegt gerade der Schwerpunkt des ersten Theiles, da sie an Bedeutung die *Huygens*'sche Abhandlung weit überragen. Um dieselben besonders heraustreten zu lassen, sind sie zwischen Anführungsstriche »...« eingeschlossen worden. *Jakob Bernoulli* giebt in diesen Anmerkungen wichtige Verallgemeinerungen, indem er an Stelle der Zahlenwerthe in der ursprünglichen Aufgabe Buchstaben setzt und für diese die Lösung giebt, wodurch die Natur und Bauart derselben erst in volles Licht tritt; ferner beweist er *Huygens*'sche Sätze auf anderem Wege, bez. zum ersten Male, giebt neue Methoden für die Auflösung von Aufgaben und behandelt die von *Huygens* im Anhange gestellten Aufgaben.

Der zweite Theil enthält eine ausführliche und sehr vollständige Darstellung der Combinationslehre, deren Wichtigkeit für die Wahrscheinlichkeitsrechnung *Jakob Bernoulli* klar erkannt hatte; berühmt ist dieser Theil vornehmlich dadurch, dass in ihm zum ersten Male die von *Euler* nach ihrem Entdecker benannten *Bernoulli*'schen Zahlen vorkommen. In dem dritten Theile wird die Combinationslehre auf Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung angewendet und eine Reihe von zum Theile sehr schwierigen Problemen gelöst.

Der nur aus fünf Kapiteln bestehende vierte Theil überragt, trotzdem er unvollendet ist, an Bedeutung thurmhoch die drei andern Theile. Gehen in den ersten drei Theilen die mathematischen Leistungen *Jakob Bernoulli*'s auch weit über die seiner Vorgänger hinaus, so erheben sich die Anwendungen, welche von der Wahrscheinlichkeitsrechnung gemacht werden, nicht über das gewohnte Niveau: nur Spielprobleme werden behandelt. Anders aber verhält es sich mit dem letzten Theile. Trotz seiner Nichtvollendung hat in ihm *Jakob Bernoulli* der Wahrscheinlichkeitsrechnung ganz neue Bahnen gewiesen und ihr die heutige weittragende Bedeutung für alle Gebiete des Lebens geschaffen und wissenschaftlich

begründet. Trotz einiger Vorläufer in dieser Richtung, welche ich in den speciellen Textanmerkungen noch zu erwähnen haben werde, und trotz der hohen Meinung, welche *Huygens* in der Vorrede zu seiner Abhandlung von der Wahrscheinlichkeitsrechnung äussert, waren es thatsächlich noch kühne Fragen, deren Beantwortung *Jakob Bernoulli* von ihr verlangte und erhielt: Können wir bei scheinbar noch so zufälligen Erscheinungen und Ereignissen durch häufige Beobachtungen die Gesetze, denen sie unterworfen sind, mit genügender Sicherheit erkennen und wie hängt die Genauigkeit des Resultates von der Anzahl der angestellten Beobachtungen ab? Die Antwort auf diese Fragen liefert sein berühmter Satz (IV. Theil, Seite 104), mit welchem wir uns in den Anmerkungen noch zu beschäftigen haben werden. Kann man die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses nicht *a priori* durch Abzählen der seinem Eintreten günstigen und ungünstigen Fälle ermitteln, so kann man sie stets *a posteriori* bestimmen, d. h. »aus dem Erfolge, welcher bei ähnlichen Beispielen in zahlreichen Fällen beobachtet wurde«. Damit war neben die Wahrscheinlichkeit *a priori* die für alle Anwendungen auf die verschiedenen Gebiete des Lebens ungleich wichtigere Wahrscheinlichkeit *a posteriori* gestellt.*)

In dem Briefe über das Ballspiel hat *Jakob Bernoulli* es mit solchen Wahrscheinlichkeiten a posteriori zu thun, wenn er annimmt, dass die Geschicklichkeiten der Spieltheilnehmer durch zahlreich von ihnen abgelegte Proben bekannt seien.

Die weitere Entwickelung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, soweit sie von der Ars conjectandi beeinflusst ist, knüpft gerade an den letzten Theil derselben und das *Bernoulli*'sche Theorem an. Die ersten drei Theile der Ars conjectandi konnten bei ihrem Erscheinen deshalb nicht mehr den ihnen zukommenden Einfluss ausüben, weil ihnen derselbe durch die oben genannten Werke von *de Montmort* und *de Moivre*, welche früher erschienen, wenn auch später entstanden waren, bereits vorweggenommen worden war und sie auch von dem Werke des letzteren Autors durch gewandtere Analyse übertroffen wurden. Dagegen knüpfen in einem anderen Werke von *de Moivre*, der 1716 in erster, 1738 in zweiter und

*) Man vergleiche auch die schönen Worte, mit welchen *Laplace* in seiner Théorie analytique des probabilités, introduction p. XLVII, *Bernoulli*'s grosse Entdeckung würdigt.

1756 in dritter Auflage erschienenen Doctrine of chances gewisse Entwickelungen an *Bernoulli*'s Satz an; er giebt für den *Bernoulli*'schen Summenausdruck einen Integralausdruck, welcher als ein Vorläufer des bekannten *Laplace*'schen Integrals angesehen werden muss.

Mächtig hat sich seit der Mitte des vorigen Jahrhunderts die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Grund der genialen Gedanken *Jakob Bernoulli*'s entwickelt — deren Tragweite er wohl zu ermessen wusste, wie die Schlussworte des vierten Theiles seiner Ars conjectandi zeigen — bis sie heute durch die glänzenden Forschungen von *Laplace* und vornehmlich *Gauss* zum unentbehrlichen Hülfsmittel für jede exakte Forschung geworden ist. Eine eingehende Schilderung dieser Entwickelung hier zu geben ist unmöglich, so mancher glänzende Name in Folge dessen auch ungenannt bleiben muss. In dieser Richtung verweise ich auf *Todhunter*'s schon genanntes Werk und auf den Notice historique sur le calcul de probabilité überschriebenen Abschnitt in der Introduction zu der klassischen Théorie analytique des probabilités von *Laplace*, welche zum ersten Male 1812 in Paris erschien.

Specielle Textanmerkungen.

1) *Zu S. 4.* Dieser etwas orakelhaft klingende Satz konnte, ohne dass dieser ganze Abschnitt hätte umgestaltet werden müssen, nicht deutlicher formulirt werden. Was *Huygens* mit demselben sagen will, ergiebt sich völlig klar aus seinen Ausführungen zu den Sätzen I bis III. —

An dieser Stelle seien zugleich einige Eigenthümlichkeiten, welche sich in der Schreibweise der Formeln bei *Bernoulli* finden, erwähnt. Statt des jetzt üblichen Gleichheitszeichens $=$ benutzt er das von *Descartes* eingeführte Zeichen ∝, welches eine umgekehrte Verschlingung der Buchstaben *ae* (aequale) vorstellt. Die Proportion $a : b = c : d$ schreibt er $a \cdot b :: c \cdot d$, welche Schreibweise (nach *Cantor*) von *William Oughtred* (1574—1660) in seiner Clavis mathematica eingeführt ist; statt $\frac{p \cdot \frac{a}{2} + q \cdot \left(-\frac{a}{2}\right)}{p+q} = \frac{(p-q)\frac{a}{2}}{p+q}$ findet

man $\frac{p^{a:2}+q^{-a:2}}{p+q} \infty \frac{\overline{p-q}^{\,a:2}}{p+q}$ geschrieben, und ähnliche Eigenthümlichkeiten.

2) *Zu S. 12.* In dieser und den folgenden Aufgaben habe ch die Spieltheilnehmer mit grossen Buchstaben bezeichnet, m die schwerfälligen *Huygens*'schen Redewendungen »ich nd ein Andrer«, »ich und zwei Andere«, und ähnliche zu ermeiden. In einigen Auflösungen und in den Aufgaben des .nhanges findet sich diese Buchstabenbezeichnung schon im riginal vor.

Trotzdem *Bernoulli* unter IX das allgemeine Theilungsroblem formulirt, hat er dessen Lösung für mehr als zwei pieler nirgends versucht; für 2 Spieler giebt er die allgemeine ösung auf S. 106—111. Ich verweise in dieser Hinsicht B. auf *A. Meyer*, Vorlesungen über Wahrscheinlicheitsrechnung, deutsch bearbeitet von *A. Czuber*. eipzig, 1879), S. 84, wo die Lösung mittelst bestimmter tegrale gegeben ist. Ich gebe hier nur die allgemeine ummenformel für zwei und drei Spieltheilnehmer, denen, um as ganze Spiel zu gewinnen, noch bez. m, n und m, n, r inzelspiele fehlen und welche für das Gewinnen eines solchen ez. die Wahrscheinlichkeiten α, β und α, β, γ haben, wo $+\beta=1$, bez. $\alpha+\beta+\gamma=1$ ist. Bezeichnen $A_{m,n}$ nd $A_{m,n,r}$ die Wahrscheinlichkeiten des A bei zwei, bez. drei pieltheilnehmern, wenn ihm noch m Spiele fehlen, so ist

$$A_{m,n}=\alpha^m \sum_{\varrho=0}^{n-1} \binom{m+\varrho-1}{\varrho} \beta^\varrho$$

ind

$$A_{m,n,r}=\alpha^m \sum_{\varrho=0}^{n-1} \sum_{\sigma=0}^{r-1} \binom{m+\varrho-1}{\varrho} \binom{m+\varrho+\sigma-1}{\sigma} \beta^\varrho \gamma^\sigma.$$

lus diesen Formeln erhält man durch cyklische Vertauschung on m, n und α, β, bez. m, n, r und α, β, γ die Hoffnungen er übrigen Spieler. Setzt man $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$, bez. $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{3}$, o kann man mit diesen Formeln leicht die beiden Tafeln ontroliren. Im ersten Falle lässt sich der Werth

$$A_{m,n}=\frac{1}{2^{m+n-1}} \sum_{\varrho=0}^{n-1} \binom{m+\varrho-1}{\varrho} 2^{n-1-\varrho}$$

leicht in den von *Bernoulli* (auf S. 110) gegebenen Werth überführen:

$$A_{m,n} = \frac{1}{2^{m+n-1}} \sum_{\varrho=0}^{n-1} \binom{m+n-1}{\varrho}.$$

Bei *Bernoulli* sind nur m und n miteinander vertauscht.

3) *Zu S. 16.* Hier habe ich den Buchstaben n eingeführt, während *Bernoulli* diese Formel mühsam und doch undeutlich mit Worten beschreibt.

4) *Zu S. 21.* Diese Ueberschrift findet sich nicht bei *Huygens*, sondern ist erst von *Bernoulli* hinzugefügt. »Wurf« bedeutet später öfter auch soviel als ein Spiel unter mehreren zu gewinnenden Spielen.

5) *Zu S. 28.* Die Citate sind im Originale öfter ungenau und daher dann hier abweichend.

Die Erwiderung, welche *Bernoulli* in den Anmerkungen zu der Aufgabe X auf den möglicherweise gegen die Richtigkeit der Lösung zu erhebenden Einwand giebt, ist von *Prevost* in den Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin, 1781 einer Kritik unterzogen worden. Aus *Bernoulli*'s Schlussworten geht aber deutlich hervor, dass er mit dieser Erwiderung nur in populärer Weise veranschaulichen will, wie unberechtigt solche Einwände sind.

6) *Zu S. 32.* Dieser Brief ist vom 29. Juli 1654 datirt und findet sich wieder abgedruckt in den Oeuvres de *Fermat*, publiées par les soins de *Paul Tannery* et *Charles Henry*, T. II, p. 289—298, 70ter Brief. (Paris 1894.)

Der Anonymus, von welchem *Bernoulli* spricht, ist offenbar der schon erwähnte Spieler *de Méré*.

7) *Zu S. 42.* Hier ist eine der erwähnten Textkürzungen vorgenommen, indem die Hoffnungen eines Spielers, welcher mit n Würfen ein Ziel ein-, zwei-, . . ., m-mal erreichen will, im Texte fortgelassen sind, da die allgemeine Formel der Tafel auf S. 43 völlig ausreichend ist.

Für die Binomialcoefficienten, welche im Originale ausführlich hingeschrieben sind, habe ich die moderne Schreibweise $\binom{n}{m}$ benutzt, ausser wenn der Text die ausführliche *Schreibweise* $\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdots m}$ nöthig machte.

Zu beachten ist, dass *Huygens* hier und in einigen folgenden ufgaben mit a den Spieleinsatz bezeichnet, *Bernoulli* aber den dazu gehörigen Anmerkungen den Spieleinsatz gleich 1 tzt und mit a die Anzahl aller Fälle bezeichnet.

8) *Zu S. 46.* Wählt man die Gerade CH als x-Axe ıd CD als y-Axe, so ist die Gleichung der Curve:

$$y = c\left(\frac{a}{c}\right)^x$$

ıd die Gleichung der geraden Linie:

$$y = 2bx + 2c,$$

lglich ist für die Abscisse des Schnittpunktes beider:

$$c\left(\frac{a}{c}\right)^x = 2bx + 2c,$$

h. es ist $x = CH = n$.

Die Figur entspricht dem darüberstehenden Zahlenbeispiele $: c = 6 : 5$. Die Kreuzchen auf der Linie CH markiren e Endpunkte der zehnmal aufgetragenen Längeneinheit, so- ıss man für n sofort den Werth 9,7 . . . ablesen kann.

9) *Zu S. 55.* Die beiden von *Bernoulli* in dem Journal ɔs Sçavans (Ephem. Erud. Galliae) für 1685 gestellten Auf- .ben sind specielle Fälle von den beiden Aufgaben III und IV ·r Tafel auf Seite 56; man erhält jene, wenn man in den ɔsungen der letzteren $m = \frac{5}{6}$ setzt. In den Acta Erud. ips. 1690, p. 223—224 und 358—360 geben *Bernoulli* ıd *Leibniz* nur die Lösungen, ohne sie wirklich abzuleiten. gl. auch *Jacobi Bernoulli* Opera [Genf 1744] p. 207 und 30.) Bei *Leibniz* ist nur das Bildungsgesetz leichter zu er- ›nnen als bei *Bernoulli*.

Die von *Bernoulli* auf den Seiten 51—52 und 55—59 .twickelte Methode darf man wohl als seine werthvollste ɔistung im ersten Theile bezeichnen.

10) *Zu S. 59.* Im Originale findet sich noch nirgends e decimale Schreibweise der Brüche.

11) *Zu S. 62 und 65.* Durch Weglassung der im Ori- nale mitgetheilten ausführlichen Rechnung ist hier wesentlich ›kürzt worden.

12) *Zu S. 69.* Statt des weitschweifigen Textes im Ori- ıale sind hier nur die Resultate tabellarisch zusammengestellt.

13) *Zu S. 75.* Bezeichnet A_m die Hoffnung des A, alle n Münzen seines Gegners zu erhalten, wenn er selbst m Münzen hat, so hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{b}{a}$, bei dem nächsten Spiele eine Münze seines Gegners zu erhalten, und $\frac{c}{a}$, eine seiner eigenen Münzen an ihn zu verlieren, und daher ist

$$A_{m-1} = \frac{b}{a} A_m + \frac{c}{a} A_{m-2}.$$

Bezeichnet man noch $A_m - A_{m-1}$ mit $\varphi(m)$, und beachtet man, dass $a = b + c$ ist, so folgt

$$\varphi(m) = \frac{c}{b} \varphi(m-1),$$

mithin

$$\varphi(m) = \left(\frac{c}{b}\right)^{m-1} \varphi(1).$$

Nun ist aber $A_{m+n} = 1$, da A gewonnen hat, wenn er alle $m + n$ Münzen besitzt, und $A_0 = 0$, da dann B alle $m + n$ Münzen besitzt, und folglich ist $\varphi(1) = A_1 - A_0 = A_1$, also

$$\varphi(m) = \left(\frac{c}{b}\right)^{m-1} A_1$$

oder

$$A_m = A_{m-1} + \left(\frac{c}{b}\right)^{m-1} A_1.$$

Setzt man in dieser Gleichung für m nacheinander die Werthe 2, 3, ..., m und addirt man dann sämmtliche Gleichungen zu einander, so ergiebt sich

$$A_m = A_1 \left[1 + \frac{c}{b} + \left(\frac{c}{b}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{c}{b}\right)^{m-1}\right]$$

$$= \frac{b^m - c^m}{b^{m-1}(b-c)} A_1.$$

Da die linke Seite dieser Gleichung gleich 1 ist, wenn man $m + n$ an Stelle von m setzt, so folgt

$$A_1 = \frac{b^{m+n-1}(b-c)}{b^{m+n} - c^{m+n}}$$

und mithin schliesslich

$$A_m = \frac{(b^m - c^m)\,b^n}{b^{m+n} - c^{m+n}}.$$

In ganz gleicher Weise findet für die Hoffnung des B, alle Münzen seines Gegners zu erhalten, wenn er selbst n Münzen hat:

$$B_n = \frac{(b^n - c^n)\,c^m}{b^{m+n} - c^{m+n}}.$$

Aus dem Umstande, dass die Hoffnungen beider Spieler bei Beginn des Spieles sich zu 1 ergänzen, folgern zu wollen, wie es *Todhunter* (a. a. O., S. 63) thut, dass das Spiel ein Ende haben, d. h. ein Spieler in endlicher Zeit alle Münzen besitzen muss, ist offenbar nicht erlaubt, da kein Grund gegen die Möglichkeit, dass das Spiel nie zu Ende kommt, vorhanden ist.

Die von *Jakob Bernoulli* ohne Beweis gegebene Formel ist zuerst von *de Moivre* in seiner Abhandlung De mensura sortis bewiesen.

---

14) *Zu S. 77.* *Schooten*'s Exercitationes mathematicae sind schon in der historischen Einleitung genannt worden.

Jean Prestet (gestorben 1690) hatte ein zu seiner Zeit sehr geschätztes Lehrbuch Elemens des Mathematiques geschrieben, welches zuerst 1675 und dann in wiederholten Auflagen erschienen ist. Nach *Wallis*' Behauptung enthält das Werk ungefähr alles, was bis dahin auf algebraischem Gebiete geleistet worden war.

John Wallis (1616—1703) war, nachdem er erst mit theologischen Studien begonnen hatte, von 1649 an Professor der Geometrie in Oxford und eines der ersten Mitglieder der Royal Society. Am bekanntesten von ihm sind die beiden Werke: Arithmetica infinitorum, welche 1655 erschien, und Treatise of Algebra both historical and practical with some additional treatises, welcher zuerst 1685 erschien und dann 1693 in lateinischer Bearbeitung in den zweiten Band seiner Werke aufgenommen wurde. Dieses

letztere Werk, welches hier in Betracht kommt, war für seine Zeit ein ausgezeichnetes Lehrbuch der Algebra, ist aber von einer einseitigen Voreingenommenheit für englische Leistungen auf diesem Gebiete und Ueberschätzung dieser nicht frei zu sprechen.

Von *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646—1716) ist hier die Dissertatio de arte combinatoria (Mathem. Schriften, herausgeg. von *Gerhardt*, Bd. 5, S. 7—79) zu nennen, welche 1666 im Drucke erschien und 1690 ohne Wissen ihres Verfassers in Frankfurt am Main nachgedruckt wurde. In derselben wird zum ersten Male der Name Ars combinatoria gebraucht, welcher dieser mathematischen Disciplin geblieben ist. Nach *Cantor*'s ausführlicher Inhaltsangabe (Geschichte der Mathematik, Bd. 3, S. 41 und 42) betrachtet *Leibniz* sowohl Permutationen als Combinationen (nach dem heutigen Sprachgebrauche), welche er variationes und complexiones nennt; das Wort Permutation ist von *Bernoulli* in die Wissenschaft eingeführt (vgl. S. 78). Die Classe, zu welcher combinirt werden soll, heisst exponens, welche Bezeichnung auch *Jakob Bernoulli* in der Ars conjectandi benutzt. Ferner finden sich noch einige Sätze über die Permutationszahlen (wie kurzweg die Anzahl der Permutationen von gegebenen Elementen bezeichnet werden soll). Der Vollständigkeit wegen nenne ich noch die beiden Abhandlungen: De primitivis et divisoribus ex tabula combinatoria (Math. Schriften, Bd. 7, S. 101—113) und die hochbedeutsame Nova Algebrae promotio (Math. Schriften, Bd. 7, S. 154—189), welche letztere sich erst in *Leibniz*' Nachlasse vorgefunden hat. —

Da *Pascal* unter den in der Vorrede zum zweiten Theile aufgeführten Autoren fehlt, so muss man wohl annehmen, dass *Bernoulli Pascal*'s combinatorische Untersuchungen in dem Traité du triangle arithmétique nicht gekannt hat, was um so merkwürdiger ist, als das genannte Werk bereits 1665 erschienen war, und was sich nur durch die Langsamkeit des damaligen Verkehrs erklären lässt. Wie *Cantor* (a. a. O., Bd. 3, S. 340) angiebt, ist zwar *Bernoulli* auf *Pascal*'s Werk im April 1705 von *Leibniz* brieflich aufmerksam gemacht worden, hat aber dasselbe schwerlich noch kennen gelernt, da er in diesen letzten Monaten seines Lebens meistens krank war.

Einen vorzüglichen Ueberblick über den jetzigen Stand der Combinatorik giebt der Aufsatz »Combinatorik« von *E. Netto* in der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften Bd. 1, S. 28—46 (Leipzig, 1898).

15) *Zu S. 77. Bernoulli* scheint zuerst eine Theilung des zweiten Theiles in nur drei Abschnitte (Permutationen, Combinationen, Variationen) beabsichtigt zu haben, wie der Schlussabschnitt der Einleitung im Originale andeutet; ich habe in demselben die der jetzigen Eintheilung entsprechenden geringfügigen Aenderungen angebracht.

16) *Zu S. 80.* Ursprünglich verstand man unter Anagramm das Rückwärtslesen eines oder mehrerer Worte, z. B. Roma und Amor. Später wurde es üblich, irgend eine Permutation der Buchstaben der ursprünglichen Worte darunter zu verstehen, z. B. Roma und Mora. Vornehmlich beliebt waren derartige Spielereien im Orient; in Europa wurden im 16. und 17. Jahrhundert Anagramme des eigenen Namens gern als Pseudonyme benutzt. Auch diente das Anagramm dazu, eine gefundene Methode zu verbergen, durch Veröffentlichung desselben aber sich die Priorität zu sichern. In dieser Absicht verbarg *Newton* den Kern seiner Fluxionsrechnung in dem Anagramme: $6a$, $2c$, d, ae, $13e$, $2f$, $7i$, $3l$, $9n$, $4o$, $4q$, $2r$, $4s$, $8t$, $12v$, x, welches den Satz versteckte: Data aequatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa (Aus einer Gleichung, welche beliebig viele Fluenten enthält, die Fluxionen zu finden und umgekehrt). Anagrammsammlungen: *Celspirius*, De anagrammatismo (Regensburg, 1713); *Wheatley*, On anagrams (London, 1862).

17) *Zu S. 81. Thomas Lansius* (1577—1657) war Professor der Jurisprudenz in Tübingen und zugleich fürstlicher Commissarius und Visitator der Universität. Er gab »Orationes« heraus. Die von *Bernoulli* angeführten Verse bilden übrigens kein Distichon, sondern sind zwei Hexameter.

Joseph Scaliger (1540—1609) erhielt, nachdem er ausgedehnte Reisen in Italien, England und Schottland unternommen hatte und auch kurze Zeit Professor in Genf gewesen war, die Professur der schönen Wissenschaften in Leyden, welche er von 1593 an bis zu seinem Tode inne hatte, ohne Vorlesungen zu halten. Sein Lehrbuch der Chronologie »Opus de emendatione temporum« war bahnbrechend, während seine übrigen mathematischen Werke voll falscher Behauptungen und Ansichten waren.

Bernhard Bauhusius (1575—1619) war Jesuit und Priester in Löwen. Er schrieb neun Bücher Epigramme und ein Buch geistlicher Lieder.

Erycius Puteanus oder *van der Putten* (1574—1646) wurde 1601 Professor eloquentiae, später spanischer Historiograph in Mailand. Er unterhielt eine ganz aussergewöhnlich grosse Correspondenz mit allen möglichen hochgestellten und berühmten Leuten, sodass sich bei seinem Tode mehr als 16 000 Briefe in seiner Bibliothek vorfanden.

Gerhard Johann Voss, latinisirt *Vossius* (1577—1649), war zuerst als Rector einer Schule in Dordrecht, dann an der Universität Leyden und zuletzt am Gymnasium in Amsterdam thätig. Sein eigentliches Arbeitsfeld war das klassische Alterthum und »mathematische Studien kamen dementsprechend für ihn nur so weit in Betracht, als sie sich mit seinen literarhistorischen Forschungen kreuzten« (*Cantor*, a. a. O., Bd. 2, S. 600). Der vollständige Titel seines posthum erschienenen mathematischen Werkes ist: De universae mathesios natura et constitutione liber. —

Die Bildung von Anagrammen wurde im 17. Jahrhundert auf religiösem Gebiete besonders fleissig geübt. So sind z. B. um 1680 aus dem Ave Maria:

Ave Maria gratia plena dominus tecum

hundert einen Sinn ergebende Anagramme gebildet, welche in drei Classen (Aussprüche der Maria von sich selbst, Aussprüche über sie und Anreden an sie) zerfallen.

Bauhusius theilt seine Anagramme nach den Anfangsworten ein: 54 beginnen mit Tot tibi, 25 mit Tot sunt, u. s. w. *Puteanus* scheint es für das grösste Verdienst von *Bauhusius* zu halten, dass er soviele Anagramme grade herausgebracht hat, als nach dem Almagest des *Ptolemäus* Sterne am Himmel stehen sollten.

In der Originalausgabe der Ars conjectandi findet sich auf den Seiten 79, 80, 81 die ausführliche Aufzählung der 3312 Anagramme, welche *Bernoulli* aus dem Verse des *Bauhusius* gebildet hat. Nach den Schlussworten des I. Kapitels hat *Bernoulli* aber diese Aufzählung gar nicht zur Veröffentlichung bestimmt gehabt, weshalb dieselbe hier unterblieben ist, zumal sie gar kein Interesse darbieten kann; daher folgt auf die Seitenzahl [78] des Originals unmittelbar [82].

18) *Zu S. 83.* *Bernoulli* gebraucht zwar immer die Bezeichnung Exponent (exponens) für Classe, wie schon erwähnt; da aber heute das Wort Exponent eine ganz andere Bedeutung hat, so habe ich vorgezogen, die jetzt übliche

Bezeichnung Classe an seine Stelle zu setzen. Die Worte combinatio, conternatio, u. s. w. finden sich schon bei *Leibniz*, dagegen scheinen die Worte nullio, unio, binio, u. s. w. von *Bernoulli* gebildet zu sein.

19) *Zu S. 92—95.* Die Beweise dieser Hülfssätze haben in formaler Beziehung manches Unbefriedigende, was besonders in dem Beweise des Hülfssatzes (5) hervortritt.

Der Beweis des Hauptsatzes auf S. 94 lässt sich sehr einfach führen, wenn man sich zunächst die Frage vorlegt, welche Gestalt die Glieder $a_{c,\nu}$ einer Zahlenreihe, wo c eine bestimmte ganze Zahl ist und ν die Zahlen 1, 2, 3, ... durchläuft, haben müssen, damit für jeden ganzzahligen Werth von n

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_{c,\nu} : n a_{c,n} = 1 : r$$

sich verhält oder

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n-1} a_{c,\nu} + \left(1 - \frac{n}{r}\right) a_{c,n} = 0$$

ist. Bildet man sich nun die letzte Gleichung für $n = 1, 2, 3, \ldots, r-1, r, r+1, \ldots n$, so folgt

$$a_{c,1} = a_{c,2} = \cdots = a_{c,r-1} = 0,$$

$$a_{c,r+1} = \binom{r}{r-1} a_{c,r}, \quad a_{c,r+2} = \binom{r+1}{r-1} a_{c,r}, \quad \ldots,$$

$$a_{c,n} = \binom{n-1}{r-1} a_{c,r};$$

$a_{c,r}$ bleibt willkürlich.

Ist nun noch

$$a_{c+1,n+1} = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_{c,\nu},$$

so folgt

$$a_{c+1,n+1} = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \binom{\nu-1}{r-1} a_{c,r} = \binom{n}{r} a_{c,r}$$

und mithin

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_{c+1,\nu} = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \binom{\nu}{r} a_{c,r} = \binom{n+1}{r+1} a_{c,r}.$$

Daraus folgt sofort der Hülfssatz (5):

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_{c+1,\nu} : (n+1)\, a_{c+1,n+1} = \binom{n+1}{r+1} a_{c,r} : (n+1)\binom{n}{r} a_{c,r}$$
$$= 1 : (r+1).$$

Die beiden Voraussetzungen dieses Satzes sind aber für die Glieder der ersten Columne der Tafel der figurirten Zahlen erfüllt und zwar ist für diese $c = 1$, $r = 1$, $a_{1,n} = 1$. Daraus folgt dann allgemein für die c^{te} Columne $r = c$ und $a_{c,n} = 0$ für $n < c$, $a_{c,c} = 1$, $a_{c,n} = \binom{n-1}{c-1}$ für $n > c$, womit zugleich die in der Folgerung (S. 96) enthaltenen Resultate abgeleitet sind. —

Die Erfindung des Beweisverfahrens durch vollständige Induction, d. h. mit Hülfe des Schrittes von r auf $r+1$, welches in den Hülfssätzen (4) und (5) benutzt ist, wurde, wie *Cantor* (a. a. O., Bd. 3, S. 329) angiebt, lange Zeit *Bernoulli* zugeschrieben, sodass die Methode oft mit seinem Namen benannt worden ist. Wenn *Bernoulli* die Methode sicher auch von neuem aufgefunden hat, so gebührt die Priorität jedoch *Pascal*, welcher sie in seinem Traité du triangle arithmétique gegeben und benutzt hat.

20) *Zu S. 96. Johann Faulhaber* (1580—1635), Rechenmeister in Ulm; sein Freund und Gönner *Johann Remmelin* war gleichzeitig Arzt daselbst. Beide gaben von 1612—1619 Schriften mathematischen Inhalts, durch welche hauptsächlich die Lehre von den arithmetischen Reihen gefördert wurde, gemeinsam heraus. *Faulhaber* stellte auch Summenformeln auf für die Potenzen der aufeinanderfolgenden Zahlen der natürlichen Zahlenreihe bis zur Summe der 11. Potenzen einschliesslich, zu welchen er vermuthlich durch Bildung fortgesetzter Differenzenreihen gelangt war (*Cantor*, a. a. O., Bd. 2, S. 683—684).

Nicolaus Mercator (ca. 1620—1687), dessen eigentlicher Name *Kaufmann* war, lebte nach vollendeten Studien in England, wo er zu den Mitgliedern der Royal Society gehörte und 1668 seine Logarithmotechnia (seu methodus nova et accurata construendi logarithmos) schrieb. Später ging er nach Frankreich und legte die Wasserkünste in Versailles an.

Unter den von *Bernoulli* hier genannten Autoren, welche sich mit den figurirten Zahlen beschäftigt haben, fehlen *Michael Stifel* (1486 oder 1487—1567), *Nicolo Tartaglia* und *Pascal*. Der erstgenannte Autor hat in seiner Arithmetica integra von 1544 eine Anordnung der figurirten Zahlen gegeben, welche man aus *Bernoulli*'s Tafel auf Seite 88 erhält, wenn man in der zweiten Columne die ersten zwei, in der dritten die ersten vier, ..., in der k^{ten} die ersten 2^{k-1} Glieder wegstreicht, alle übrigen Zahlen aber an ihren Stellen stehen lässt. *Tartaglia*'s Tafel in seinem General Trattato di numeri e misure ist mit *Bernoulli*'s Tafel auf Seite 112 identisch. *Pascal*'s arithmetisches Dreieck erhält man aus der Tafel auf Seite 112, wenn man in derselben alle unterhalb der von links unten nach rechts oben gezogenen Diagonale stehenden Glieder streicht. Ausführliche Mittheilungen über diese früheren Arbeiten siehe bei *Cantor* (a. a. O., Bd. 2, S. 397—398, 479—480, 684—688). Während die beiden erstgenannten Autoren die figurirten Zahlen nur additiv entstehen lassen, auf Grund der bekannten Formel:

$$\binom{n+1}{c} = \binom{n}{c} + \binom{n}{c-1},$$

findet sich bei *Pascal* auch die multiplicative Entstehung:

$$\binom{n}{c} = \frac{n(n-1)\cdots(n-c+1)}{1\cdot 2\cdots c}.$$

21) *Zu S. 97—99.* Mit dieser Behauptung, dass der Inductionsbeweis zu wenig wissenschaftlich ist, will natürlich *Bernoulli* nur die unvollständige Induction treffen. Mit Ueberraschung nimmt freilich nach diesen Worten der Leser auf S. 99 wahr, dass *Bernoulli* die unvollständige Induction hier selbst, allerdings in genialster Weise benutzt, um aus den Formeln für $S(n)$, $S(n^2)$, ..., $S(n^{10})$ die Formel für $S(n^c)$, wo c irgend eine ganze positive Zahl ist, hinzuschreiben. Wie er jedoch zu dieser Formel und vornehmlich zur Abtrennung der Factoren $\frac{1}{2}\binom{c}{1}$, $\frac{1}{4}\binom{c}{3}$, $\frac{1}{6}\binom{c}{5}$, $\cdots$ in den Coefficienten von n^{c-1}, n^{c-3}, n^{c-5}, ..., wodurch die zweiten Factoren A, B, C, ... als constante Zahlen übrig bleiben, gekommen

ist, entzieht sich unserer Kenntniss. *Schwering* hat einen Wiederherstellungsversuch unternommen, welcher von *Cantor* (a. a. O., Bd. 3, Vorwort, Seite IX—X) mitgetheilt ist. Aus ihm folgt zwar, dass die Exponenten der Potenzen n von der $(c-1)^{\text{ten}}$ an immer um 2 Einheiten abnehmen müssen; dieser Umstand aber dürfte von *Bernoulli* einfach aus der Bauart der Formeln für $c = 1, 2, \ldots, 10$ ohne weiteres entnommen sein, sodass *Schwering*'s Versuch schwerlich *Bernoulli*'s Gedankengange entspricht. Ganz unerklärt bleibt aber, wie *Bernoulli* erkannt hat, dass die Coefficienten A, B, C, ... constante, abwechselnd positive und negative Zahlen sind, was zuerst *Euler* (Calculus differentialis, Bd. 2, Kap. 5) mit Hülfe der trigonometrischen Reihen bewiesen hat. Dass die Zahlen A, B, C, ... abwechselnd positive und negative Werthe haben, ist auf Grund ihrer ursprünglichen Definition bis heute noch nicht bewiesen; die moderne Ableitung der Formel für $S(n^c)$ zeigt nur, dass sie constant sind. Den Namen *Bernoulli*'sche Zahlen haben die Zahlen A, B, C, ... von *de Moivre* (Miscellanea analytica, London 1730) und *Euler* erhalten; heute versteht man darunter gewöhnlich die absoluten Werthe von A, B, C, ...

Kleidet man die von *Bernoulli* auf Seite 99 gegebene Regel für die reccurrente Berechnung der Coefficienten A, B, C, ..., zu welcher er sicher dadurch gelangt ist, dass er $n = 1$ setzte, in eine Formel ein, so ist, wenn man noch an Stelle von A, B, C, D, ... B_1, $-B_2$, B_3, $-B_4$, ... setzt:

$$\sum_{\sigma=1}^{\sigma=m} (-1)^\sigma \binom{2m+1}{2\sigma} B_\sigma + m - \frac{1}{2} = 0,$$

$m = 1, 2, 3, \ldots$. Diese Formel wird gewöhnlich als die *Moivre*'sche Formel bezeichnet, was aber deshalb unbillig ist, weil *Moivre* weiter nichts gethan hat, als die von *Bernoulli* klar ausgesprochene Regel in Gestalt einer Formel zu schreiben, ohne aber einen Beweis derselben zu geben. Ueber *Bernoulli*-sche Zahlen vgl. *Saalschütz*, Vorlesungen über die *Bernoulli*'schen Zahlen (Berlin, 1893) und *Haussner*, Zur Theorie der *Bernoulli*'schen und *Euler*'schen Zahlen (Göttinger Nachrichten, 1893, Nr. 21), wo die betreffende Literatur ziemlich vollständig angegeben ist.

22) *Zu S. 100.* *Ismael Bullialdus* oder *Boullaud*, auch *Boulliau* (1605—1694) gehörte zu dem Bekanntenkreise von *Girard Desargues*, Pater *Mersenne*, *Roberval*, dem älteren *Pascal*, u. a. Nach vielen weiten Reisen war er zuletzt Priester an der Abtei St. Victor zu Paris; auch war er Mitglied der Royal Society. Er hat eine grössere Reihe von Werken mathematischen, physikalischen und astronomischen Inhalts geschrieben. Sein Opus novum ad arithmeticam infinitorum ist 1682 in Paris erschienen und besteht aus 6 Büchern.

23) *Zu S. 101.* Hier ist stark gekürzt, indem eine Anmerkung fortgelassen ist, in welcher nur sehr ausführlich gezeigt wird, wie man einen Binomialcoefficienten $\binom{n}{c}$ genau oder mit Hülfe von siebenstelligen Logarithmen angenähert berechnet, wenn n und c grosse Zahlen sind. *Bernoulli* berechnet $\binom{100}{20}$, wobei er sogar zeigt, wie man im Zähler und Nenner gemeinsame Factoren streichen muss. Aehnliche sachlich unbedeutende Kürzungen sind in den folgenden Hülfssätzen 1, 2, 3 und 6 vorgenommen.

24) *Zu S. 109.* Vgl. Oeuvres de *Pascal* (Paris, 1872), Tome III, p. 226—231.

25) *Zu S. 110.* Die hier gegebenen Zahlenbeziehungen lassen sich leicht allgemein begründen. Der Zähler des in der m^{ten} Columne und n^{ten} Zeile stehenden Bruches ist

$$\sum_{\varrho=0}^{\varrho=n-1}\binom{m+n-1}{\varrho}=\sum_{\varrho=0}^{\varrho=n-2}\binom{(m-1)+(n+1)-1}{\varrho}+\binom{m+n-1}{m-1},$$

wo das erste Glied auf der rechten Seite offenbar der Zähler des in der $(m-1)^{\text{ten}}$ Columne und $(n+1)^{\text{ten}}$ Zeile stehenden Bruches und das zweite Glied die in dem $(n+1)^{\text{ten}}$ Felde der Tafel auf Seite 112 stehende m-Eckszahl ist. Ferner ist

$$\sum_{\varrho=0}^{\varrho=n-1}\binom{m+n-1}{\varrho}=\sum_{\varrho=0}^{\varrho=n-3}\binom{(m-2)+(n+2)-1}{\varrho}+\binom{m+n}{m-1};$$

hier ist das erste Glied rechts der Zähler des in der $(m-2)^{\text{ten}}$ Columne und $(n+2)^{\text{ten}}$ Zeile stehenden Bruches und das

zweite Glied die in dem $(n+2)^{\text{ten}}$ Felde der Tafel auf Seite 112 stehende m-Eckszahl.

26) *Zu S. 121. Bernoulli* gebraucht hier und in den folgenden Kapiteln nicht das Wort »Variation«, sondern bezeichnet die jetzt so genannten Complexionen als »Combinationen in Verbindung mit ihren Permutationen«. Schon der Kürze wegen empfahl sich die Einführung der modernen Bezeichnung.

27) *Zu S. 126.* In der Logik bedeutet bekanntlich der Buchstabe A ein allgemein bejahendes, E ein allgemein verneinendes, J ein particular bejahendes und O ein particular verneinendes Urtheil [Beispiele: (A) Alle S sind P; (E) Kein S ist P; (J) Einige S sind P, (O) Einige S sind nicht P]. Unter einem kategorischen Syllogismus versteht man einen aus drei kategorischen Urtheilen (d. h. solchen Urtheilen, welche ihren sprachlichen Ausdruck in einem einfachen Aussagesatz finden) bestehenden Schluss vom Allgemeinen auf das Besondere.

Als Modi bezeichnet man die verschiedenen kategorischen Syllogismen, welche den Variationen der vier Schlussarten A, E, J, O zur dritten Classe mit Wiederholung entsprechen. Aber nicht alle diese Variationen liefern brauchbare (»gute«) Modi; in der Logik werden gewöhnlich 19 derselben als brauchbare Modi aufgeführt und mit aus der Scholastik stammenden Worten bezeichnet, die jedesmal drei von den Vokalen A, E, J, O enthalten und so zugleich die Arten der verwendeten Urtheile bezeichnen (z. B. barbara, celarent, darii, ferio, u. s. w.). Die Anwendung der Combinatorik auf die Lehre vom Syllogismus wird auf den Peripatetiker *Aristo* von Alexandrien zurückgeführt (vgl. *Prantl*, Geschichte der Logik im Abendlande, Bd. I, S. 557 und 570).

Singuläre Urtheile sind solche, deren Subject einen einzigen Gegenstand ausmacht; sie werden jetzt unter die particularen Urtheile subsummirt. Auch die unbestimmten Urtheile pflegt man nicht mehr von den allgemeinen und particularen zu trennen; es sind solche, bei denen der Umfang des Subjectbegriffes nicht genau bestimmt ist.

28) *Zu S. 131 und 132.* Dass in der Tafel die Anzahl der Variationen zur höchsten Classe stets gleich der Anzahl der Variationen zur nächstniederen Classe ist, wieviele Dinge auch variirt werden, lässt sich folgendermaassen beweisen.

Bildet man sich die entsprechende Tafel für das Product $p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \ldots p_\varrho^{\nu_\varrho} \ldots p_k^{\nu_k}$, so hat man zuerst ν_1 Zeilen (entsprechend $p_1^{\nu_1}$) mit allen figurirten Zahlen bis zu den ν_1-Eckszahlen (einschl.) zu bilden und erhält in $2\nu_1 - 1$ Columnen Zahlen; in der letzten Columne steht die Zahl $\binom{2\nu_1 - 1}{\nu_1 - 1}$ und in der vorletzten stehen die Zahlen $\binom{2\nu_1 - 2}{\nu_1 - 2}$ und $\binom{2\nu_1 - 2}{\nu_1 - 1}$, welche addirt ebenfalls $\binom{2\nu_1 - 1}{\nu_1 - 1}$ ergeben. Dann hat man die Summenzahlen in der $(\nu_1 + 1)^{\text{ten}}$ Zeile mit ebensovielen natürlichen Zahlen, Dreiecks-, ..., ν_2-Eckszahlen zu multipliciren und sich so ν_2 Zeilen zu bilden und zu summiren. Dann hat man jetzt in der letzten, d. i. der $(2\nu_1 + \nu_2 - 2)^{\text{ten}}$ Columne das Glied:

$$\binom{2\nu_1 - 1}{\nu_1 - 1}\binom{2\nu_1 + \nu_2 - 2}{\nu_2 - 1}$$

und in der vorletzten Columne:

$$\binom{2\nu_1 - 1}{\nu_1 - 1}\binom{2\nu_1 + \nu_2 - 3}{\nu_2 - 2} + \binom{2\nu_1 - 1}{\nu_1 - 1}\binom{2\nu_1 + \nu_2 - 3}{\nu_1 - 1}$$
$$= \binom{2\nu_1 - 1}{\nu_1 - 1}\binom{2\nu_1 + \nu_2 - 2}{\nu_2 - 1}.$$

In der Weise fährt man in der Bildung der Tafel fort. Nimmt man nun an, dass die beiden letzten Variationszahlen für $p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \ldots p_{\varrho-1}^{\nu_{\varrho-1}}$ einander gleich sind, und hat man die ν_ϱ Zeilen, welche $p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \ldots p_\varrho^{\nu_\varrho}$ entsprechen, gebildet, so findet man, dass in der letzten, d. i. der $(2\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_\varrho - \varrho)^{\text{ten}}$ Columne das Glied

$$\binom{2\nu_1 - 1}{\nu_1 - 1}\binom{2\nu_1 + \nu_2 - 2}{\nu_2 - 1} \cdots \binom{2\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_\varrho - \varrho}{\nu_\varrho - 1}$$

allein steht, und in der vorletzten die beiden Glieder

$$\binom{2\nu_1 - 1}{\nu_1 - 1}\binom{2\nu_1 + \nu_2 - 2}{\nu_2 - 1} \cdots \binom{2\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_{\varrho-1} - \varrho + 1}{\nu_{\varrho-1} - 1} \times$$
$$\times \left\{\binom{2\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_\varrho - \varrho - 1}{\nu_\varrho - 2} + \binom{2\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_\varrho - \varrho - 1}{\nu_\varrho - 1}\right\},$$

stehen, deren Summe wieder gleich dem Gliede der letzten Columne ist. Mithin ist die Behauptung durch vollständige Induction streng bewiesen.

Giessen, 16. März 1899.

R. Haussner.

Berichtigungen.

S. 59, Z. 2 von oben ist $\frac{c}{a}$ statt $\frac{a}{c}$ zu setzen.

S. 71, Z. 12 von oben ist hinter »spielen« hinzuzufügen »mit drei Würfeln«.

S. 112, Combinationstafel, Z. 1, Columne XII muss es 1 statt 2 heissen.

Inhalt.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.








WIDENER
STALL-STUDY
CHARGE
2000
CANCELLED


WIDENER
SEP 1 1 1995


3 2044 018 716 803

